数学圈丛书

数学圈 3

Mathematical Circles Adieu and Return to Mathematical Circles

【美】H·W·伊弗斯/著　李　泳　刘晶晶/译



湖南科学技术出版社

欢迎你来数学圈

欢迎你来数学圈，那是我们熟悉而陌生的园地。

我们熟悉它，因为几乎每个人都走过多年的数学路，从123走到6月6（或7月7），从课堂走进考场。然后，我们把它留给最后一张考卷，解放的头脑，不再为它留一点儿空间。我们也陌生，模糊的记忆里，是残缺的公式和零乱的图形，是课堂的催眠曲，是考场的蒙汗药……去吧，那些被课本和考卷异化和扭曲了的数学；忘记那一朵朵恶之花，我们会迎来新的百花园。

“数学圈丛书”请大家走进数学圈，也走近数学圈子里的人。这是一套新视角下的数学读物，它不为专门传达任何具体的数学知识和解题技巧，而以“非数学的形式来普及数学”，着重宣扬数学和数学家的思想和精神。它的目的不是教人学数学，而是改变人们对数学和数学家的看法，把数学融入大众文化，回到人们的生活。读这些书不需要智力竞赛的紧张，而是要一点儿文艺欣赏的平和。你可以怀着360样心情来享受数学，经历它的趣味和生命，感悟符号背后的情感和人生。

没有人怀疑数学是文化的一部分，但诺大的“文化”，却往往将数学排除在外。当然，从人数来看，数学家在文

化人中顶多占一个测度为零的空间。但是，数学的每一点进步都影响着整个文明的根基。借一个历史学家的话说，“有谁知道，在微积分和路易十四时期的政治的朝代原则之间，在古典的城邦和欧几里得几何之间，在西方油画的空间透视和以铁路、电话、远距离武器制胜空间之间，在对位音乐和信用经济之间，原有深刻的一致关系呢?”（斯宾格勒《西方的没落·导言》）所以，数学不在象牙塔，就在身边。上帝用混乱的语言摧毁了石头的巴比塔，而人类用同一种语言建造了精神的巴比塔，那就是数学。它是艺术，也是生活;是态度,也是信仰;是最复杂的简单，也是最单纯的完美。

数学是生活。当然，我们的意思不是说生活离不开算术，技术离不开微积分；而是说数学本身也能成为大众的生活态度和生活方式。很多人感觉数学枯燥无味，是因为他把数学从生活中赶走了。当你发现一个小公式也像一首小诗那么多情的时候，还忍心把它忘记吗？大家能享受“诗意的生活”，从这点说，数学是一样的。

数学的生活很简单。如今流行着很多深藏“大道理”的小故事，那些道理多半取决于讲道理的人的态度和立场。它们是多变的，因为多变而被随意扭曲，因为扭曲而成为多样选择的理由。在所谓“后现代”的今天，似乎一切东西都成为多样的，人们像浮萍一样漂荡在多样选择的迷雾里，起码的追求也失落在“和谐”的“中庸”里。数学能告诉我们，多样的背后存在统一，极端才是和谐的源泉和基础。从某种意义说，数学的精神就是追求极端，它永远选择最简的、最美的，当然也是最好的。数学决没有圆滑的道理，也不为模糊的借口留下一点儿空间。

数学生活也浪漫。很多人怕数学抽象，却喜欢抽象的绘画和怪诞的文学。可见抽象不是数学的罪过。艺术家的想象力令人羡慕，而数学家的想象力更多。希尔伯特说过，如果哪个数学家一旦改行做了小说家（真的有），我们不要惊奇——因为那人缺乏足够的想象力做数学家，却足够做一个小说家。懂一点儿数学的

伏尔泰也感觉，阿基米德头脑的想象力比荷马的多。我们认为艺术家最有想象力，那是因为我们自己太缺乏想象力。

数学是明澈的思维。生活里的许多巧合——那些常被有心或无心地异化为玄妙或骗术法宝的巧合，也许只是自然而简单的数学结果。以数学的眼光来看生活，不会有那么多的模糊。有数学精神的人多了，骗子（特别是那些穿戴科学衣冠的骗子）的空间就小了。无限的虚幻能在数学找到最踏实的归宿，它们"如龙涎香和麝香，如安息香和乳香，对精神和感观的激动都一一颂扬。"（波德莱尔《恶之花·感应》）

数学是奇异的旅行。数学在某个属于它们自身的永恒而朦胧的地方，在那片朦胧的土地上，我们已经看到了三角形的三个内角和等于180度，三条中线总是交于一点而且三分每一条中线；在那片朦胧的土地上，还存在着无数更令人惊奇的几何图形和数字的奇妙，等着我们去和它们相遇。

数学是纯美的艺术。数学家像画家和诗人，都创造"模式"，不过是用思想来创造，用符号来表达。数学的思想，就像画家的色彩和诗人的文字，以和谐的方式组织起来。数学的世界里没有丑陋的位置。在数学家的眼里，自己笔下的公式和符号就像希腊神话里的那位塞浦路斯国王，从自己的雕像看到了爱人的生命。在数学里，在那比石头还坚硬的逻辑里，真的藏着数学家们的美的追求，藏着他们的性情和生命。

数学是精神的自由。惟独在数学中，人们可以通过完全自由的思想达到自我的满足。不论王摩诘的"雪地芭蕉"还是皮格马利翁（Pygmalion）的加拉提亚（Galatea），都能在数学中找到。数学没有任何外在的约束，约束数学的还是数学。

数学是永不停歇的人生。学数学的感觉就像在爬山，为了寻找新的山峰不停地去攀爬。当我们对寻找新的山峰不再感兴趣，生命也就结束了。

不论你是不是知道一点儿（或很多）数学，都可以走进数学圈，孔夫子说了，"知之者不如好之者，好之者不如乐之者。"

只要“君子乐之”，就走进了一种高远的境界。王国维先生讲人生境界，是从“望极天涯”到“蓦然回首”，换一种眼光看，就是从无穷回到眼前，从无限回归有限。而真正圆满了这个过程的，就是数学。来数学圈走走，我们也许能唤回正在失去的灵魂，找回一个圆满的人生。

1939年12月，怀特海在哈佛大学演讲《数学与善》中说，“因为有无限的主题和内容，数学甚至现代数学，也还是处在婴儿时期的学问。如果文明继续发展，那么在今后两千年，人类思想的新特点就是数学理解占统治地位。”这个想法也许浪漫，但他期许的年代似乎太过久远——他自己曾估计，一个新的思想模式渗透进一个文化的核心，需要1 000年——我们的希望是，这个过程会快一点儿，更快一点儿。

最后，我们借从数学家成为最有想象力的作家的卡洛尔笔下的爱丽思和那只著名的“柴郡猫”的一段充满数学趣味的对话，来总结我们的数学圈旅行：

> “你能告诉我，我从这儿该走哪条路吗?”
> “那多半儿要看你想去哪儿。”猫说。
> “我不在乎去哪儿——”爱丽思说。
> “那么你走哪条路都没关系，”猫说。
> “——只要能到个地方就行，”爱丽思解释。
> “噢，当然，你总能到个地方的，”猫说，“只要你走得够远。”

我们的数学圈没有起点，也没有终点，不论怎么走，只要走得够远，你总能到某个地方的。

李泳
2006年8月

中译本序

现在流行一句话，世界是平的。这原是物理概念，也是数学结论。借这句卖出去的话来说，数学是圆的，能把什么都圈进来了，而不单是问题、定理和公式。这也是本书不同于其他"方"数学读物的地方。

《数学圈》是一系列轻松愉快的精神旅行，包括《走进数学圈》（原分上下卷）、《重游数学圈》、《相约数学圈》、《告别数学圈》和《回归数学圈》，原由 Prindle, Weber & Schmidt 在 1969 到 1987 年间陆续出版，前些年美国数学会将其合为三册，即我们现在看到的版本。编者伊弗斯（Howard Eves）是了不起的数学导师，"不论给中学生、大学生讲还是给数学老师讲，他总能令听众着迷。"同事们听了他的课，赞叹为"最迷人的演讲"。伊弗斯 1934 年在弗吉尼亚大学获学士学位，第二年为哈佛硕士，然后在普林斯顿大学继续学习，1948 年获俄勒冈州立大学数学博士学位。在普林斯顿，他认识了爱因斯坦，经常一起散步，从学校回家。路上有家杂货店，店里有冰激凌。有一次，爱因斯坦说那锥形的玩意儿挺好看，伊弗斯就给他买了一个。从此，他们每次经过都会买冰激凌。有一天，走到店门口时，爱因斯坦眼睛一亮，大声说，"看啦，今天我也带钱了！"当他把硬币放在柜台上时，伊弗斯赶紧拿出自

己的钱把它换了回来——那枚爱因斯坦硬币成为他后来的数学博物馆的第一件藏品。这个发生在作者身上的故事（据他在缅因州立大学的同事 Clayton Dodge 的回忆），表现了数学家的好奇、天真和快乐，这些品格时时流露在许多数学家的故事里，也代表着数学圈的精神。

20 世纪 40 年代以来，伊弗斯相继在纽约锡拉丘兹大学、普吉特湾大学和俄勒冈州立大学任教，1954 年到新成立的缅因州立大学，直到 1976 年退休。退休以后，他“像从美国最东的顶点滚下的石头”，从缅因州立大学的 Machias 和 Lubec 分校直到东南角的中佛罗里达大学。他一生写过 30 本书，200 多篇论文。两卷《几何考察》是他的权威著作，而两卷《数学的伟大时刻》是他关于数学历史的 43 个精彩演讲。我们把伊弗斯的履历写出来，是因为书中的许多故事就发生在他工作过的地方。同时也是为了纪念这位可敬的数学老师。其实他距离我们很近——三年前的今天，2004 年 6 月 6 日，93 岁的老人家才离开我们。

“圈”在这里的近 2000 个数学和数学家的故事，像出没在数学星空不同时空区域的星星，但我们很容易从它们组合出几个大的星座：数学史的、数学人的、数学娱乐的，还有数学幽默的。任何读者当然都能从这个星空发现乐趣，而在过去的几十年里，它还发挥了一样更特殊也许更重要的功能——正如出版者在前言里说的，“成千上万的数学老师都从这些轶事中发现了乐趣，还将它们用于教学，给课堂增添情趣，让数学多一点儿人文色彩，激发学生的灵感，追寻文化历史的线索。”我们相信，这些星星同样能点缀我们的中小学数学课堂，让同学通过它们来经历数学的惊奇，感觉数学的魔力。

数学的第一个魔力是吸引我们的好奇心。很多历史人物（不单数学家）小时候都为欧几里得几何感到惊奇，他们惊奇什么？今天我们在几何课上还有多少惊奇？同样惊奇的还有那个大家都习惯了的“第五公设”——现代数学和物理学，至少有一半是从对它的好奇开始的。如果没有那一点好奇，今天我们大概

也不能说“世界是平的”。因为原始的好奇，欧几里得几何把生活和观察理性化了；因为思想的好奇，非欧几何从人类的纯粹理性中产生了；而它们与物理世界的“前定和谐”，似乎就是爱因斯坦说的世界上“最难理解的”事情，也是我们永远的好奇的源泉。

数学的第二个魔力来自一只看不见的手。想一个最简单的问题：一个物体在重力作用下从空间一点到另一点（两点不在同一垂线），沿什么样的路径最节省时间？这是300年前的一个数学挑战，好奇的同学可以慢慢思考。从某种意义说，数学就是通过这个习题，伸出了它那只魔力的手，指引着万物运行的轨迹，也引出了一个绝妙的自然法则。大多数人并不需要学会如何挥动那只手，但如果知道有那样一只手，我们就能以更透明的眼光来看世界和自然，看到复杂的简单的和谐。

数学的第三个魔力在于它的人情味。孟夫子早就说过，“颂其诗，读其书，不知其人，可乎?”数学也不例外，也是“可以兴，可以观，可以群，可以怨”的，我们为什么不也怀着读诗的心情去认识它背后的人呢？每个人大概都能说出很多数学家的名字，不过那通常只是定理或公式的标签，并不能唤起对一个个有血肉的人物的联想。我们在这儿能遇见形形色色的古今人物，可爱的，可恨的，可乐的，可笑的，可悲的，可怜的，可敬的，可耻的……但“真正的数学家”（哈代的意思）似乎都很简单，有些还是被生活嘲弄的对象。其实他们本来也未必比别人聪明，只是靠了更多的无知换来那“一点”特别的聪明。我们可以看到，数学人比其他科学圈子里的人更像老子所谓的“建德若偷，质真若渝，大白若辱，大方无隅”。从这一点说，数学也是一门自我修养的工夫。一支笔，一张纸，“回也不改其乐”。有人问大数学家庞加莱如何才能像数学家一样思考，他回答说，“找一条倾斜的沙土小路，走上去，走下来，然后反复走上走下。数学思想就在脚底的摩擦中产生出来了。”简单地说，经常在自己的头脑里想想数学，则“鄙吝之心不复生矣!”

100 年前，法国《数学教育》杂志对数学家进行过一次问卷调查，第一个问题是“你什么时候开始对数学发生兴趣?”60%的回答在 11 岁到 18 岁之间。就是说，数学不一定要从很小的时候起步，很多数学家是从中学时代开始对数学发生兴趣的。如果我们今天的课堂能多一点兴趣，多一点人情味，也许能少扼杀几个未来的数学家吧?

最后说说译本。

原书是相隔 20 年的产物，故事来源（作者）众多，有时出现不同说法，与流行说法也不尽相同，正好互为补充。很多人物多次出现，背景介绍时有重复，译本也保留了；对不那么出名的数学家，我们多次在译名后保留了原文。很多不大流行的名词(地名、杂志、图书等)零星出现在不同的地方，译本也不厌重复地留下原文，以方便感兴趣的读者利用网络和工具书检索相关信息。

原书引用了许多文学作品片断，译者未能全部找原著来对照，因此片断的译文不一定符合原来作品的环境。好在作者的意图是从中看到一点数学趣味，这一点尽量保留了。

原书有不少带着数学家机敏的文字游戏（如打油诗、笑话、双关语等），有的完全是靠英文读音来表现的，如果译成中文，不但失去了原来的趣味和精神，中文也毫无意义。因此保留了原文，略加注释说明。它们是西方数学娱乐文化的一部分，也正好是课堂数学游戏的题目。

原书提及很多文化和教育背景，译本补充了一些注释和图片(原有的图片有编号，增加的图片没有编号)。图片主要来自一些名画和老照片，多数来源已无从考察。借作者在前言的话说，如果谁发现我们可能“偷”了他的作品，请求他原谅。

原书出现了一些德文、法文和西班牙文的句子，译者感谢张卜天、刘胜利、萧耐园、徐纪贵等先生的译文。

译者
2007 年 6 月 6 日

出版者的话

多年来，著名数学史家和数学导师霍华德·伊弗斯(Howard Eves)收集了大量数学和数学家的奇闻轶事，将它们汇编为六卷《数学圈》。成千上万的数学老师都从这些轶事中发现了乐趣，还将它们用于教学，给课堂增添情趣，让数学多一点儿人文色彩，激发学生的灵感，追寻文化历史的线索。通过与伊弗斯教授特别商量，美国数学会(MAA)很高兴将六卷《数学圈》重新出版发行。

《走进数学圈》是最早的一卷，1969年出版，赢得了一片喝彩。现在作为这个三卷本的第一卷。《重游数学圈》和《相约数学圈》合为第二卷,《告别数学圈》和《回归数学圈》合为第三卷。

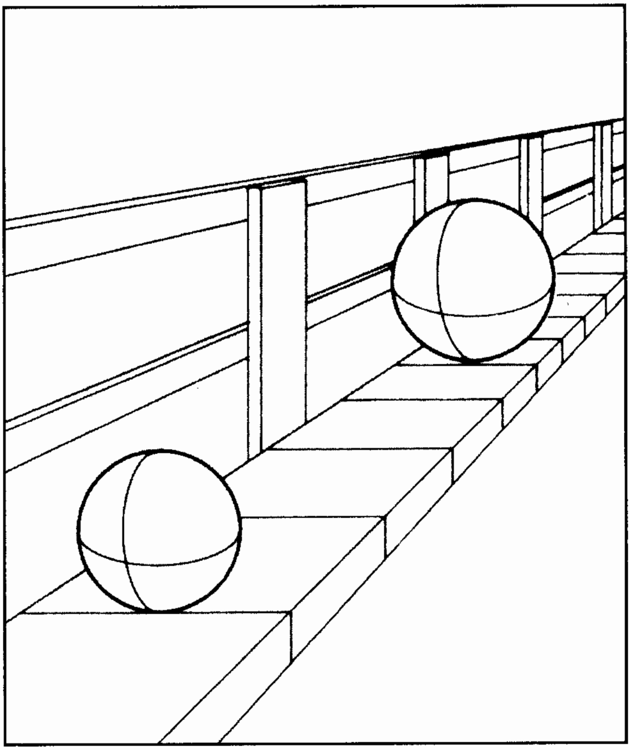
这个三卷本《数学圈》全集一定能让你们快乐起来，所有的数学爱好者们，特别是那些欣赏数学人文和文化的人们。

目 录

告别数学圈

回归数学圈

告别数学圈



透视引起的光学错觉（1456°）

前　言

走完第三个数学圈（《相约数学圈》）之后，我真不想再走下去了。然而，在那以后的5年里，很多数学同道给我寄来了大量的故事，希望它们能出现在以后的漫游中，于是我只好决定再走一圈。这儿就是结果，我就以它来告别那些令人愉快的旅行。

我还要说，许多故事不可能追寻其真实性，我们应该把它们当作传说而不是真事，其实，有人曾经为“轶事”下了一个卓有见识的定义：“关于某个名人的从来不曾发生过的能启迪别人的报道”。

我要感谢为我提供材料的人，感谢鼓励我继续数学圈旅行的人。特别要感谢《数学教师》杂志和《美国数学月刊》，感谢我的朋友埃德（Elwood Ede）和缅因州立大学马齐亚斯（Machias）分校的伙伴们（我汇编此书时正在那儿的数学系帮忙），感谢普林德（Prindle）、韦伯（Weber）和施密特（Schmidt）的慷慨和理解。最后，我希望这第四集故事能让我们长久地记住两个特别可爱而卓绝的数学家

莫德尔（L. J. Mordell）和穆瑟（Leo Moser）。再见了，朋友们。也许将来有一天我们这些爱好者的灵魂能在英雄的殿堂相遇，那时我们再来分享更多的发生在地球的往事。

霍华德·伊弗斯

第一象限

从惟一的学位论文
到卡洛尔的壁炉

美国早期的数学

在早期的美国殖民地，数学起步很晚，相较于同时期的欧洲国家，其数学教育和研究都显得十分贫乏。这是可以理解的，因为早期的殖民者把大部分时间和精力都投入到了更为现实和急迫的事情上。尽管起步缓慢而吃力，但随着19世纪的过去，美国数学却以惊人的持续增长的速度发展着，如今，它已经走在了全球数学的最前头。

早期美国数学的精彩而简洁的考察，参见史密斯（D. E. Smith）和金斯堡（Jekuthiel Ginsburg）的《1900年前的美国数学史》(Carus数学专著第5号)，这个单元的许多故事都受那本小书的启发。

1° 惟一的学位论文

美国早期的大学主要是为了训练神职人员，因而紧跟英国的计划，将他们的工作主要限制在拉丁文和希腊文，结果，即便是硕士学位的科学课程，也没有什么价值。1700年前美国产生的惟一数学硕士论文是“圆面积可求吗?”作者站在肯定的立场。这篇论文出现在1693年的哈佛大学。

2° 早期的学位论文

早期美国大学数学的标准之低，从下列1718年耶鲁大学学士学位论文题目可见一斑：

1. 任何给定的数乘以一个小数，其值减小，而除以一

个小数，其值增大。［显然没有考虑类似的普通真分数的情形。］

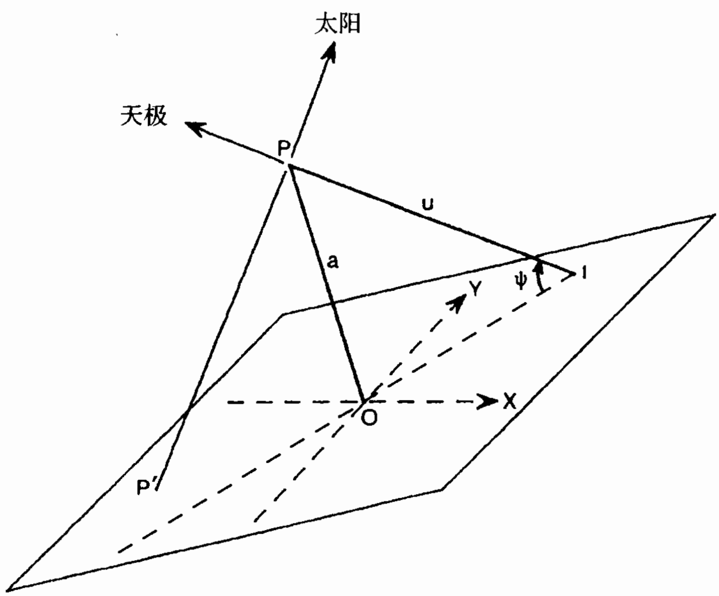
2. 被乘方的数可以从开方得到。

3. 给定三角形底和高，底角不能用含有正弦函数的公式表达。［如果以直角三角形的任一直角边为底，作者似乎不知道 $\tan A=\sin A/(1-\sin^2 A)^{1/2}$］。

4. 运用对数能精确求解三角问题。

5. 球体表面积是其最大圆周面积的 4 倍。

6. 水平日晷的底角必须与天极的高度一致。



日晷计算

3° 低水平的教育

1785 年的《纽约市哥伦比亚大学校规》说明了美国早期大

学数学水平是多么低下。例如，入学考试的人只需要懂四则运算和比例法。在大学一年级，学生每周学三个课时的普通小数、开方和二次方程以内的代数。到了大学二年级，每天一节数学课，学习欧几里得的《原本》、球面三角、圆锥曲线和“更高级的代数学分支”。到了三年级，就不再要求更高深的数学了，只是在物理和天文学的课程中附带一起讲。

4° 美国早期的神学数学

清教徒希望能在美国发展圣联邦，宗教领袖如马瑟（Cotton Mather）、爱德华（Jonathon Edwards）、怀特菲尔德（George Whitefield）和沃尔曼（John Woolman）的狂热，自然会在早期的美国大学教育中留下痕迹。同样，国王学院（哥伦比亚大学前身）第一任校长约翰逊（Samuel Johnson）和地方主教柏克莱（George Berkeley，后来成为主教）则尽力引导殖民地的人民回到英国国教的教堂。随后柏克莱写了多篇论文抨击牛顿流数基础的缺陷。他的《文集》广泛涉及数学各方面。1729 年，柏克莱主教去了罗德岛的纽波特，在美国呆了 3 年。

正是早期的宗教狂热促使美国建立了第一批大学，像英格兰和爱尔兰那样，主要是为了培养神职人员。于是，直到 1850 年，大部分美国数学教授都是牧师，他们对神学的兴趣远高于对数学的兴趣。

5° 柏克莱在美国

柏克莱（1685～1753）是著名的英国国教主教，也是牛顿流数思想的尖锐批判者。他年轻时一直希望能在百慕大群岛建立一所大学，教育美洲大陆的年轻移民和印第安人。尽管他的计划

1 柏克莱与洛克和休谟为近代经验主义哲学的三个代表。他有句名诗："帝国的路取道西行"(Westward the course of empire takes its way)，于是人们以他的名字命名加州的一个地方，那地名的通常译法是"伯克利"。



得到了一些热情的支持，最终还是流产了。在那之前，他曾在罗德岛的纽波特呆了3年(1729～1731)，大力倡导在美国殖民地办高等教育。哈佛和耶鲁至今还在纪念他，而加利福尼亚州的Berkeley就是以他的名字命名的。[1]

6° 温斯罗普的数学图书馆

从历史的角度看，重要的图书馆有时坐落在意料之外的地方，甚至当地的多数学者都不知道。例如，关于18世纪中叶的美国数学材料，最好的证据也许要在100多年前的文本里去寻找，它们如今存放在宾夕法尼亚米德维尔阿勒格尼（Allegheny）大学的图书馆里。那是温斯罗普（John Winthrop）的数学图书馆。温斯罗普是4个同名者一，也是第一任马塞诸塞湾殖民地总督的后裔。

温斯罗普是当时美国最有学问的人物之一。24岁时，他就被任命为哈佛的霍里斯（Hollis）教授，在那个岗位一直做了40年。他在哈佛为自己定的第一项任务就是掌握牛顿的《原理》，充分发挥霍里斯（Thomas Hollis）以前从英国带来的天文仪器的作用，其中包括原属哈雷（Edmund Haley）的望远镜。温斯罗普是数学家，更是天文学家，他1739年的原始天文观测记录至今还保存在哈佛图书馆。1740年，他才第一次在美国观测到了水星通过太阳表面的过程。后来，1761年，他去纽芬兰旅行，第

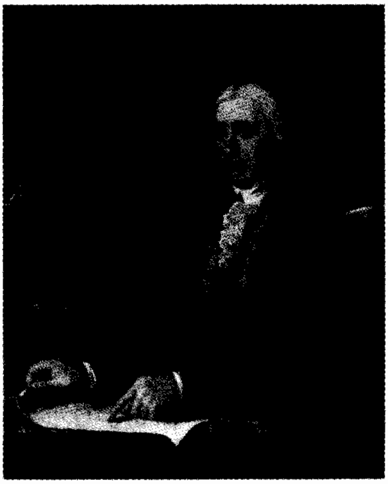
二次观测了水星凌日现象。这次旅行大概是由一个美国侨民发起的第一个纯科学探险活动。1766 年，他当选为皇家学会会员。两年后，他被爱丁堡大学授予荣誉法学博士（LL. D）学位，入选美国哲学学会。他是第一个荣获哈佛 LL. D 的人（1773 年），也是美国艺术与科学学院的主要创立者之一。

上面说的温斯罗普数学图书馆如今落户在阿勒格尼大学，收藏了 100 多部纯数学和应用数学的书，几乎都是历史上的经典。这些著作的作者包括巴娄（Barrow）、卡西尼（Cassini）、科特（Cotes）、德拉朗德（De Lalande）、德萨吉利埃（Desaguliers）、笛卡儿、欧几里得、格拉夫桑德（Gravesande）、哈雷、惠更斯、克尔（Keil）、麦克劳林、梅塞雷斯（Maseres）、牛顿、奥特雷德（Oughtred）、拉姆斯（Ramus）、威斯顿（Whiston）和沃尔夫（Wolf）。很多书都是珍本，其中任何一本都能在任何一家数学图书馆享有尊贵的地位。人们大概认为这些藏书应该放在哈佛图书馆，然而阿勒格尼得到了它们，想必有什么原因吧。本书作者几年前在那儿做了一个星期的讲座，数学系里没有一个人知道温斯罗普的藏书。

7° 杰斐逊谈里顿豪斯

里顿豪斯（David Rittenhouse, 1732 ~ 1796）是温斯罗普之后美国早期的另一个著名的对应用数学感兴趣的天文学家。他从观测做起，成为精密科学仪器的设计师。他是实践能力很强的数学家，做过大地测量员，为划定梅森 - 狄克森（Mason - Dixon）线发挥了重要作用。[2] 他对 1769 年 6 月 3 日的金星凌日现象做了精确观测，而且准确计算了将在 1874 年 12 月 8 日出现的金星凌日的基本参数。他凭着发表在《美国哲学会会刊》前 4 卷的高质

2 宾夕法尼亚州与马里兰州分界线，也就是美国南北战争分界线。



里顿豪斯在望远镜前

量论文，于1790年当选为富兰克林之后的学会主席。他是美国文学艺术学会和伦敦皇家学会会员，1789年获普林斯顿大学荣誉法学博士学位。他还是宾夕法尼亚大学副教务长，最早在望远镜中应用交叉瞄准线。1792年，华盛顿任命他为造币局局长，他在这个位置一直做到去世前一年，这也令人想起牛顿晚年做造币总监的经历。

杰斐逊会利用任何机会反驳对他的国家的批评，高度颂扬祖国人民的成就。关于里顿豪斯和他的天文馆，他写过如下一段激昂的文字：

> 我们相信里顿豪斯是健在天文学家中最杰出的，他的天赋是一流的，因为他是自学成才的。作为一个艺术家，他显示了前所未有的机械天才。他没有创造世界，但他通过模仿，比创世纪以来的任何人都更接近造物主。

8° 焚烧微积分

19世纪后期，美国大学流行着一种时尚，在二年级结束的庆祝活动上焚烧微积分课本，用一堆熊熊的篝火来表达他们对当时所学的这门功课的评价。[3]

3 相关的故事见《重游数学圈》R139。

9° 吉尔如何成为数学家

19 世纪上半叶的美国数学有许多杰出的名字，但几乎都被人遗忘了——如阿德雷因（Robert Adrain，1775～1843）、帕特森（Robert Patterson，1743～1824）、罗杰（William Rogers，1804～1882）、法拉尔（John Farrar，1779～1854）、斯特朗（Theodore Strong，1790～1869）、巴赫（Alexander Dallas Bache，1806～1867）和哈斯勒（Ferdinand Rudolph Hassler，1770～1843）。

在那些几乎被遗忘的前辈中，还有吉尔（Charles Gill），他走进数学有着一段有趣而不同寻常的经历。吉尔 1805 年出生在英格兰约克郡，是当地一个鞋匠的儿子。13 岁时他出海航行，到了西印度群岛。三年后，黄热病悲惨地夺取了许多船员的生命，才 16 岁的他一下子就被推上了船长的位置。他凭着精湛的航海技艺，将船安全驶进了目的地的港湾，而他相信自己的长处在数学。于是，他辞去海上的营生，开始了数学的教书生涯，业余时间也用来学数学。他为很多数学杂志写文章，1830 年到美国时，他已经是一个卓有建树的思想家了。

在美国，吉尔很快就投身中学的数学教育，最后落户在纽约长岛的弗拉兴（Flushing）学院。就是在这所学校（后来曾壮大为一所短命的大学），吉尔创办了半年刊的《数学杂题》杂志，主要刊登各种数学难题和高等数学题的求解。尽管杂志只坚持了四年（1836～1839），对美国数学却产生了重大影响。吉尔本人也是解数论题的高手，他解的数论题发表在很多大众普及杂志，如《太太日记》、《绅士数学伴侣》、《教育时代》，还有他自己的《数学杂题》。他还对保险计算有兴趣，被誉为“美国第一个保险计算师”。狄克森（L. Dickson）的《数论史》多次提到吉

尔的名字。

10°“详谬”关系

佩尔斯（Benjamin Peirce，1809~1880）被公认为他那个时代美国的一流数学家。他 1829 年毕业于哈佛，那年才 20 岁，1831 年成为哈佛的老师，不久之后（1833 年），被提升为数学和自然科学教授。1842 年，成为数学和天文学教授。

人们常说的佩尔斯的故事，发生在他的一堂函数论课上。他先在黑板上证明了著名的关系

$$e^{\pi/2} = \sqrt[i]{i}$$

然后转身对同学们说，“先生们，这肯定是正确的。真是一个悖论啊，我们不能理解它，我们不知道它的意思，但我们证明了它，于是我们知道它肯定是正确的。”

上面的关系还有下面更令人惊奇的等价形式：

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

在这儿，我们看到了数学里最重要的几个数字，e，i，π，1 和 0，它们就由那样一个简单的关系联系起来了。[4]

4 原文用的形式是 $e^{i\pi} = -1$，显然忽略了最重要的数字 0。

11° 大学校长的老师

洛维尔（Abbott Lawrence Lowell）是佩尔斯的学生之一，他 1877 年毕业时才 21 岁，数学成绩却是最好的。洛维尔的论文“作为四元数的二阶曲面”证明了他对数学持久的兴趣。1909 年，洛维尔成为哈佛大学校长，连续任职 24 年。

希尔（Thomas Hill，1818~1891）是佩尔斯更早的学生，但没有达到学弟洛维尔在数学上的成就。他在 1863 年成为哈佛大学校长。

12° 佩尔斯家族

佩尔斯家族是早期美国数学界最著名的家族之一。我们在前面已经提到（A10），本杰明（Benjamin Peirce，1809～1880）是哈佛大学著名的数学教授，是他那时代最重要的美国数学家。本杰明有两个儿子，詹姆斯（James Mills Peirce，1834～1906）和查尔斯（Charles Sanders Peirce，1839～1914）。詹姆斯从1860年到1869年在哈佛做了8年数学助理教授，1869至1906年间任数学教授。他主要研究应用数学。查尔斯也许是家族中最优秀的数学家，尽管到了近代他研究工作的价值才被完全认识。1859年他从哈佛大学本科毕业，年仅20。1863年他又在哈佛劳伦斯科学学院取得硕士学位。在后来的很多年里，他一直在美国海岸和大地测量局工作，在大地测量学领域负有盛名。1880年他在约翰霍普金斯大学执教，教哲学逻辑。查尔斯的后半生主要致力于数理逻辑的研究，直到最近人们才发现，他在这方面的工作才真正是开拓性的。佩尔斯家族的另一个数学成员是奥斯古德（Benjamin Osgood Peirce，1854～1914），是本杰明的侄孙，在数学物理学方面，写了很多有价值的文献。哈佛大学出版社在1926年出版了他的《数学和物理论文集1903～1913》。

13° 大师的欣赏

美国数学会第三任主席威廉·希尔（George William Hill，1838～1916），应该说是更有名的在纯数学领域做出过重大贡献的天文学家。他1859年从罗格斯（Rutgers）大学毕业，不久加入《自然年鉴》的编纂。在天文学领域，他把主要精力用于历法理论；在数学领域，他的兴趣集中在微分方程、行列式和级

数，将无限行列式引入数学。正是希尔关于无限行列式的论文，9年后吸引了庞加莱来研究其收敛性。希尔的其他工作还为庞加莱的《天体力学讲义》（*Les méthodes nouvelles de la méchanique*）奠定了基础。

庞加莱到美国访问时，伍德沃德（Robert Simpson Woodward，1849～1924）教授（美国数学会早期的杰出支持者之一，并担任第五任主席）向他引介希尔。庞加莱握住希尔的手，说的第一句话是，"你就是我来美国想见的那个人啊！"

14° 富兰克林的后代

富兰克林是业余幻方专家，还喜欢其他几种数学玩意儿（见《走进数学圈》317）。或许有人很想知道，富兰克林有没有哪个后代是名副其实的数学家？真的有那么一个人——巴赫（Alexander Dallas Bache，1806～1867）。虽然巴赫算不得数学大家，不过他还是有几篇天文学和大地测量的文章发表在皇家学会的《进展》和《美国哲学会会刊》。1828年到1841年间，他是宾夕法尼亚大学自然哲学和化学教授。1843年，他担任了美国海岸测量的负责人，并因此赢得名誉。

费马和笛卡儿

我们看到，在前面的单元里，17世纪的美国没有好的数学教育，更没有一流的数学家。与这幅荒凉景象形成鲜明对比的是，欧洲的数学繁荣兴旺，正经历着蓬勃发展的时期。

就在17世纪初，纳皮尔发明了对数，哈里奥特（Harriot）和奥特雷德提出了代数的概念和符号，伽利略建立了动力学，开

普勒发表了行星运动定律。接着，德萨格和帕斯卡打开了射影几何的大门，费马开创了现代数论，费马和笛卡儿带来了解析几何，费马、帕斯卡和惠更斯奠定了现代概率论的基础。然后，世纪之末，在大量数学家铺平了道路以后，牛顿和莱布尼茨带来了划时代的微积分。17 世纪是欧洲数学真正值得纪念的一个时代。

在上面提到的那些欧洲数学伟人中间，我们现在讲的故事是关于两个法国人的：费马和笛卡儿。这二位以及其他那些人物的故事，在前面的几次数学圈旅行中已经讲过不少了。

15° 费马生日之谜

从保存到今天的似乎可靠的报告看，费马 1601 年 8 月 17 日出生在图卢兹附近的博蒙－德－洛马内（Beaumont de Lomagne）。我们还知道他 1665 年 1 月 12 日在卡斯特雷（Castres）或图卢兹去世。他的墓碑原先在图卢兹的奥古斯丁教堂，后来移到了当地的博物馆。墓碑上刻写的也是那个死亡日期，但年龄是 57 岁。因为这两个显然的矛盾的数据，费马的生卒年代一般都写（1601？～1665）。实际上，根据不同作者的理由和材料，费马的生年估计为 1590～1605 年。

16° 费马哪儿来的时间？

费马除了图卢兹议会的工作外，还做了那么多一流的数学，人们自然会问，他从哪儿找到那么多时间来做他的创造性工作？问题的关键似乎在于他在图卢兹议会的工作是所谓“国王的顾问”。国王的顾问和其他公务不同，而是要求他远离老乡，回避不必要的社会活动，这样才能保证他不受贿赂的诱惑，不受党派

争斗的影响，从而尽心尽责地做好自己的事情。总之，费马的议员职位为他提供了足够的闲暇时间。

17° 第六个费马数

费马猜想形如

$$p_n = 2^{2^n} + 1$$

的数，对一切非负整数 n 都是素数。确实，对 $n = 0, 1, 2, 3, 4$，我们有 $p_n = 3, 5, 17, 257, 65\,537$，都是素数。可是，一个世纪以后，欧拉证明 $p_5 = 4\,294\,967\,297$，有因子 641，因而不是素数。于是，费马猜想错了。美国速算专家科尔伯恩（Zerah Colburn）还在小孩儿时，就有人问他 4 294 967 297 是不是素数。片刻心算后，他断言不是，它有因子 641。他不能解释是怎么得到这个惊人的结果的。

关于费马数的更多故事，见《走进数学圈》178。

18° 费马和他的无穷递降法

1659 年 8 月，费马在给卡尔卡维（Carcavi）的一封信中，简洁提出了他的无穷递降法，下面，我们将信中的那部分永恒的内容大概地翻译出来：

“很长时间以来，我都没能将我的方法用于肯定的命题，因为达到那些问题的曲折和技巧比用于否定问题时要困难得多。例如，为了证明每个形如 $4n + 1$ 的素数都是两个平方数之和，我就陷入了痛苦。可是，最后有个思想反复出现，给我带来一线光明，现在，肯定的命题也向我的方法屈服了，不过要借助某些必然与它有关联的新原理。我对肯定命题的推理过程是这样的：假如某个任意选择的形如 $4n + 1$ 的素数不是两个平方数之和，则

存在另一个相同性质的数，它小于那个选择的数，接着还有第三个更小的数，依此类推。以这样的方式无限递降下去，我们最后得到数5，所有这种数中最小的一个。因而，5不是两个平方数之和。然而它是。因此，根据反证法，我们得到所有形如 $4n+1$ 的素数都是两个平方数之和。”

当然，运用费马无穷递降法的最困难部分在于开始的第一步，也就是证明：如果某个猜想对所涉及类型的任意随机选择的某个数成立，则对比那个数更小的同样类型的数也成立。就费马的那个问题来说，他没有为后人留下任何记录，说明他是如何实现他的无穷递降的第一步的。结果最后是欧拉在1749年证明的，他断断续续地苦思了7年，才想到证明方法。

贝尔（E. T. Bell）指出，许多数论定理的证明，如上面说的那个，实在太模糊了，“比理解相对论还难，它需要更多的天生的才智来把握看似儿戏的东西。”关于这一点，高斯写道，“[高等算术] 的理论有一点特殊的地方，即它的重要命题连同其表面的简单性，很容易用归纳法得到，然而那些命题的深刻性质，要经过无数次的失败之后，才可能证明；即使我们成功了，也常常是通过某种乏味而做作的过程，简单的方法可能还要隐藏漫长的时间。而算术理论的无限魅力也就是从它的这种特性生出来的。”[5]

5 费马无穷递降法的一个简单例子，见《走进数学圈》(179) 对 $\sqrt{2}$ 是无理数的证明。(原注)

19° 笛卡儿与费马

笛卡儿脾气暴躁，经常发火，与费马争论数学时尖酸刻薄。而费马温文尔雅，很有耐性，争论问题时礼貌谦恭。二人的不同个性也是他们职业的反映——笛卡儿是当兵的，而费马是法官。

20° 笛卡儿奇迹

笛卡儿一生最令人难忘的事情大概在于他没有突然被长剑或步枪过早地夺去生命。他一生大部分时间都在服役，虽然在军营的多数时间没有军事行动，但也有很多冲锋陷阵的时候。例如，1620 年他 24 岁时，他在巴伐利亚选帝侯的麾下,[6] 在布拉格体验了真正的战场，差点儿送了命。后来，他随萨沃伊（Savoy）公爵，经历了更为惨烈的血战。再后来，在法兰西国王的率领下，笛卡儿在围攻拉罗谢尔的战斗中死里逃生。如果说战场的危险还不够，我们再看他的另一次历险。他出海去东弗里西亚，没带通常的卫队，一伙凶残的船员密谋抢劫他，然后把他扔进大海喂鱼。笛卡儿发觉了，于是挥舞着长剑，逼那伙人把他送上岸。

6 选帝侯就是能选举神圣罗马帝国皇帝的诸侯。

笛卡儿的奇迹在于，他的解析几何是从血腥的战场和死亡的威胁中走出来的。

21° 骑士

一天晚上一个喝得半醉的家伙侮辱和笛卡儿在一起的小姐。笛卡儿像一个真正的骑士那样，学着剑客达塔尼昂的模样,[7] 追上那个醉鬼，打掉他手中的长剑。笛卡儿没要他的命，因为他觉得在美丽的小姐面前杀那样一个人，太肮脏了。

7 达塔尼昂（D' Artagnan）是大仲马《三个火枪手》里的剑客。

22° 笛卡儿的女儿

笛卡儿没结婚，但有一个和女朋友生的女儿。孩子很早就夭折了，令他很伤心。

23° 克服抑郁症

笛卡儿的脆弱童年给他留下了抑郁症，多年里经常做死亡的

噩梦。中年时，他意识到大自然是最好的医生，保持健康的秘诀就在于战胜死亡的恐惧。这样他终于克服了抑郁症。

24° 笛卡儿的骨头

《走进数学圈》（177）讲过，笛卡儿在把学问带给年轻任性的瑞典女王克里斯蒂娜的皇家宫廷的时候，在斯德哥尔摩去世了。这位伟大的哲学家和数学家安葬在瑞典，法国想把他的遗骸迎回祖国的努力都失败了。17 年之后，那时克里斯蒂娜早已放弃了王冠和信仰，笛卡儿的遗骨（除了他的右手）才回到法国，重新安葬在巴黎现在称为伟人祠（Pantheon）的地方。笛卡儿的右手骨被法国财政大臣当宝贝留了下来，以纪念他管理财政事物的技巧。

关于笛卡儿遗骨回归故里，雅可比（C. G. J. Jacobi）评论说："占有伟人的骨灰比在他们活着时占有他们自己要容易得多。"

19 世纪前的几个数学家

下面是随便选的几个从古希腊到 18 世纪的数学家的故事，以前的数学圈都没有讲过的。

25° 销魂的瞬间

人人都听说过霍布斯（T. Hobbes）第一次接触欧几里得《原本》的故事：他把书随便打开，看到毕达哥拉斯定理，大声惊呼，"天哪，这是不可能的!"接着，他倒着读回去，读到那些公理时，他信服了。没人会怀疑霍布斯经历了一个销魂的瞬

间，而没有庸俗地想到几何在测量方面的应用。[8]

26° 信仰与推理

……真理是没有疑问的，而论证总也争论不完。

尽管欧几里得自以为比世界上的所有作者都不随便轻信别人，也没能超脱多少。他没有可以证明的第一前提，他需要超越证明的假定和公设，没有它们他就寸步难行。其实，他的超结构的确是论证，但他的基础是信仰。如果有人硬要自称不赞同那些东西，他除了说那人是傻瓜而外也没有别的办法。他说“那很荒谬”，拒绝进一步讨论下去。看来，信仰和权威对他来说也和别人一样，是必不可少的。[9]

27° 格雷汉姆的几何讲席



格雷汉姆爵士

英国最早的数学教授席位是格雷汉姆爵士（Sir Thomas Gresham，1519？～1579）在伦敦格雷汉姆学院设立的几何讲座教授。布里格斯（Henry Briggs）是牛津大学的第一任萨维尔（Savilian）教授，也荣幸地成为第一任格雷汉姆几何教授。

8 见罗素《说闲散》。（*In Praise of Idleness*, London: Geo-rge Allen and Unwin, Ltd., 1935.）

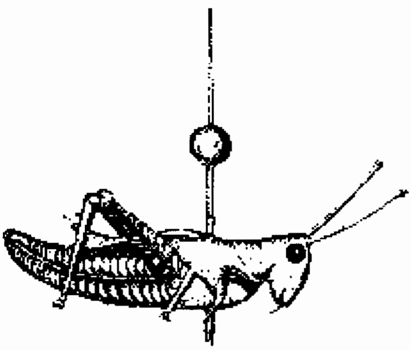
9 见巴特勒《众生之路》（*The Way of All Fresh*）第65章。塞缪尔·巴特勒（Samuel Butler, 1835～1902）被萧伯纳惊呼为“19世纪后半期最伟大的英国作家”，《众生之路》在他死后才出版。1998年兰登书屋选百部最佳英文小说，它名列12。这段话的下一句也值得一引：“那么，一个正直的人要在今天这个时代活下去，要靠什么样的信仰呢？”

28° 风向标

格雷汉姆爵士因为设立了第一个英国数学教授而闻名，另外还创立了皇家交易所。因为这个缘故，在为殖民地波士顿著名的贸易大楼法纳尔（Faneuil）大厦建风向标时，设计者把它做成小蝗虫的样子，因为格雷汉姆的羽冠上出现过那种小昆虫。设计者德罗恩（Shem Drowne）原是缅因州基特里（Kittery）的一个金属工匠，在17世纪末移居波士顿。[10]

10 法纳尔（Oeter Faneuil，1700～1743）捐给波士顿的一座大厦，也是波士顿的国家历史公园。

1974年1月5日，人们发现耸立在大厦顶部的著名蝗虫风向标不见了，很多人猜测盗贼可能是靠直升飞机把它偷走的。那个风向标价值数十万美元，后来在大厦的钟楼里找到了，看来是小偷用破布包了放那儿的。



德罗恩1742年设计的蝗虫风向标

德罗恩今天留下四个风向标，其中三个还在使用：北教堂风向标（为了预防英国人从海上进攻康科德城，老北教堂上面竖起了信号灯，风向标就立在灯塔顶上），剑桥教堂上的雄鸡形风向标，还有就是这个无价的蝗虫风向标。

29° 格雷汉姆律

以伦敦皇家交易所的创始者格雷汉姆命名的格雷汉姆律说的是，“劣币将把良币驱逐出流通。”格雷汉姆是这样陈述他的原理的：“当政府通过立法为两种或更多形式的具有不同内在价值

的流通货币赋予同样的币值时，那么，在实际的流通中，人们总是尽可能使用那些生产成本小的货币，价值高的货币就会逐渐从流通中消失。”

于是，美国在1896年开始储存金币，因为政府将发行等值的银币。同样，在欧洲，第一次世界大战刚过，就印制了大量纸币，于是价值较高的金属货币就几乎绝迹了。实际上，美国刚开始流通纸币时，人们就把比等值的美元钞票更有价值的银币收藏起来了。

早在13世纪，奸商们就会从金币刮一层下来，而得到分量不足的钱币的人，会尽快把它用出去，而把足量的金币尽可能长久地存起来。

30° 萨维尔和卢卡斯教授

许多著名英国数学家要么是牛津萨维尔教授，要么是剑桥卢卡斯教授。

萨维尔（Sir Henry Savile）原是牛津默顿（Merton）学院理事，后来成为埃顿（Eton）学院教务长，在牛津做欧几里得讲师。1619年，他在牛津设立讲席教授，一个几何学，一个天文学。布里格斯（以对数出名）是牛津第一任萨维尔几何教授。瓦利斯（John Wallis）、哈雷和雷恩也是17世纪的萨维尔教授。

卢卡斯（Henry Lukas）在1639～1640年间，是剑桥在国会的代表，在1663年促成了利用大学的资源设立冠以他的名字的讲席教授。1664年，巴娄（Isaac Barrow）当选为第一任卢卡斯教授，6年后由牛顿接任。[11]

11 现在的卢卡斯教授是霍金，据说他记得300多年来的所有卢卡斯教授的名字。

31° 伽利略的力量

人们最渴望得到的两样东西是力量和荣耀。通常说来，无知的人只能靠野蛮的方式得到其中的一样，获得对物质的控制。文化能使人以不那么有害的方式得到力量，以更恰当的方式赢得别人的尊重。伽利略为改造世界所做的事情比任何君王都多，他的力量远远超越了迫害他的人。因此，他没有必要让自己也成为一个迫害者。（罗素《说闲散》）

32° 打油诗

clerihew 是一种四行打油诗，很像五行打油诗（limerick），在英国颇为流行。这个名字源于其发明者克莱里休·本特利（Edmund Clerihew Bentley，1875～1956），是著名的《特伦特的最后一案》（*Trent's Last Case*）的作者，朋友切斯特顿（G. K. Chesterton）曾把有趣的幻想小说《那个叫星期四的人》献给他。[12]本特利最有名的打油诗写的是数学家和建筑学家雷恩（Sir Christopher Wren，1632～1723）：

Sir Christopher Wren
Said, "I am going to dine with some men.
If anybody calls
Say I'm designing St. Paul's."[13]

下面是另一首数学打油诗的例子，由德拉贝尔（J. W. de La Bere）发表在1974年12月《澳大利亚数学会学报》：

Archimedes of Syracuse,

12 参见《回归数学圈》（R119）。

13 雷恩说，"我有一个饭局，如果有人找我，就说我在设计圣保罗。"（1666年伦敦大火之后，雷恩设计重修圣保罗大教堂，见《走进数学圈》186和232。）

To get into the news,

Called out "Eureka"

And became the first streaker.[14]

14 叙拉古的阿基米德，为了新闻炒作，高喊“尤里卡”（“我发现了”），成了第一个裸奔者。

33° 欧拉与荣誉座位

1783 年，卡婕琳娜二世（Czarina Katherine II）任命能干的达西柯芙（Daschkoff）公主为圣彼得堡帝国科学院院长，引起了轰动，因为那时极少有女子获得这么高的荣誉。

公主决定先向科学院的学者们发表一个简短讲话。她请欧拉（当时已年逾古稀而且双目失明，但仍是俄罗斯最受尊重的科学家）作为她的特别嘉宾。欧拉带着一个儿子和孙子，与公主同乘一辆大马车，来到科学院。公主在讲话中表达了她对科学的崇高敬意，她说，希望欧拉的到来能成为整个科学院的灵感源泉。接着，她坐下来，并邀请欧拉坐在身旁。可还没等把欧拉引上座位，施特林（Schtelinn）教授就抢先坐在那儿了。施特林在几年前就得到彼德三世的赏识，做了国务顾问，享有少将的头衔，现在觉得自己才配坐科学院的第一把交椅。

公主看见施特林坐在身旁，转身对欧拉说，“您随便坐哪儿，您选的位置自然就是最荣耀的位置。”这话感动了欧拉和在场所有的人——当然除了那位自大的施特林教授。

34° 奇怪的错误

欧拉汇编了一本物理学课本，题目是《就各类物理学和哲学问题给德国公主的信》（*Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*）。这些信件原来是写给腓特烈大帝的侄女施维尔德（Phillipine von Schweld）公主的。七

年战争时，公主和整个柏林宫廷都寄居在马格德堡（Magdeburg）。就在那个期间，欧拉从柏林家中给公主写信，给她上课。

在1760年8月27日那封信中，欧拉给他的皇家学生解释了大地测量人员如何运用海平面。他让公主想象，从她在马格德堡的公馆画一条直线到他在柏林的家，然后问她直线是否水平。接着他否定了自己的问题，说那直线不是水平的，直线在柏林的端点应该比在马格德堡的端点高。他解释道，柏林在斯比里（Spree）河流域，马格德堡在易北（Elbe）河流域，斯比里河流入哈瓦（Havel）河，而哈瓦河流入易北河，所以，马格德堡一定比柏林更接近海平面。

实际上，易北河在马格德堡的海拔是41米，而斯比里河在柏林的海拔为33米，这显然正好与欧拉的推论相反。斯比里河的确流入哈瓦河，哈瓦河也的确流入易北河，那么欧拉的推理错在哪儿呢？看看地图（下面是简化的草图）就会发现，尽管哈瓦河流入易北河，但它们交汇的地方威腾伯格（Wittenberge）远在马格德堡的下游。很难理解为什么欧拉没有考虑这个事实，人们为这位大数学家的疏忽找了不同的解释。

有的人认为，欧拉的失误也许只是因为他简单地假定马格德堡就在威腾伯格的附近。假如想象的直线从威腾伯格画到柏林，欧拉的结论就是对的。然而，马格德堡实际上在两河交汇点上游55英里。

缅因州立大学数学系以前的同仁埃德（Elwood Ede）提出了一个更合理的解释。他认为，欧拉很可能只是错误判断了易北河的流向，以为它是从威腾伯格流向马格德堡，而不是从马格德堡流向威腾伯格。埃德说，如果欧拉是用残缺的地图，而不是通过个人观察，就很容易出现那种错误判断。埃德认为，从这样的观

点看，这个故事没有更多的意思，而欧拉的错误，虽然存在，也不值得过多去计较。

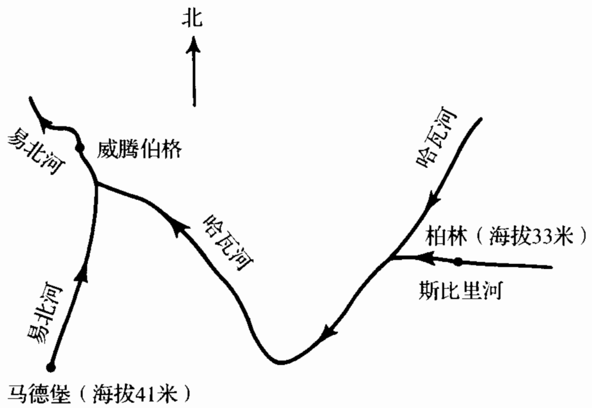


图 1

35° 泊松的人生起点

泊松（Siméon Denis Poisson，1781～1840）是他那时代的大应用数学家之一，最初的目的（全然不是他本人的心愿）是做医生。他跟叔叔学习，先学用柳叶刀刺白菜叶的叶脉，熟练以后就刺水泡。可是，就在他第一次自己动手给人治病时，病人没几个小时就死了。尽管那儿的医生们告诉他“这是非常平常的事情”，但他发誓再也不做医生了。

36° 人生好事

泊松曾说，“生命中有两件美好的事情，那就是发现数学和教数学。”

高　　斯

关于伟大的德国数学家高斯（Carl Friedrich Gauss，1777～1855），流传着无数动人的故事传说，我们在以前的数学圈旅行中已经讲过40多个，下面再讲9个。

37° 无意的双关

威廉敏娜（Wilhelmine Gauss）是高斯和第一个夫人的第二个孩子，名字源于他的亲密朋友、布雷门（Bremen）的著名天文学家威廉·奥尔伯斯（Heinrich Wilhelm Matthias Olbers）。高斯讲过一个有趣的故事。在敏娜（女儿的爱称）5岁时（1813年），一天晚上，他告诉小女孩儿天上那团小小的发着光的玫瑰色云叫“卷云”（cirri），就像一朵朵的羊毛（fleecy）。过了几个晚上，同样的云又出现了，敏娜缠着爸爸说，“再待会儿吧，爸爸，今天晚上天上有好多羊（*belämmert*）啊。”[15]

15 *Belämmert* 意思是 belambed，即小姑娘从羊毛（fleecy）联想的意思。而那个词儿听起来又像 belemmert，意思是“befouled”（弄脏了）。（原注）

38° 敏娜出嫁

1830年，敏娜嫁给了埃瓦尔德（Heinrich Ewald），哥廷根大学年轻的神学与东方语言学教授。在学术以外的事情上，埃瓦尔德简直一点儿也不用心，在和敏娜订婚和结婚的问题上，更加暴露了他的这种德性。朋友们决心要单身的埃瓦尔德结婚，他礼貌地答应了，把找女朋友的事情交给了他们。很快，高斯的两个女儿敏娜和特丽萨（Theresa）成了最佳人选。他们让埃瓦尔德自己从两人中选一个。于是，安排他去高斯家里见面，到时候两个女儿轮流出来倒茶。朋友们告诉他，他喜欢哪个，就接过她倒的

茶。埃瓦尔德高兴地答应了。在回家的路上，朋友们祝贺埃瓦尔德，说高斯很乐意他追求敏娜，因为他接受了她的茶水。埃瓦尔德不知道朋友们在说什么，好像从来没听过似的；他完全忘了刚才的事情，甚至不知道为什么去喝茶。不过，他还是追求了敏娜，而且在1830年9月15日和她结婚了。在婚礼那天，埃瓦尔德不见了，经过多方寻找，最后才发现他正坐在书架前面的梯子顶上，他已经忘了那天该做的事情。有趣的是，他们的婚姻非常幸福，因为埃瓦尔德和敏娜很恩爱，而高斯也非常喜欢同事埃瓦尔德做女婿。

39° 埃瓦尔德看孩子

敏娜身体羸弱，1840年8月12日死于肺结核，那年才32岁。几年后，埃瓦尔德再婚，1850年和第二个妻子生下一个女儿，高斯把她当亲外孙女看。一天，妻子出去买东西，把孩子留给爸爸，而埃瓦尔德正全神贯注学习阿拉伯文语法。妻子回家时，没看见孩子，埃瓦尔德也同样疑惑，不知孩子怎么不见了。后来听见呜呜的哭声，才发现孩子关在衣柜的抽屉里，显然是埃瓦尔德放进去的，大概他认为那儿是最安全的地方。

我们也许奇怪高斯的同事怎么都这样。在《相约数学圈》里，我们曾讲过哥廷根大学法学教授里本特洛普的可笑逻辑（见S190和191）。而在S193，我们看到，数学王子本人也没能幸免这种“职业病”。

40° 高斯与谷神星

太阳系大约有1500颗小行星，轨道几乎都在火星与木星轨道之间。最大（也是最早发现）的一颗叫谷神星，直径大约470

英里，月球直径的五分之一；而最小的小行星直径不到1英里。

谷神星是意大利天文学家皮亚齐（Giuseppe Piazzi，1746～1826）于1801年元旦在帕勒莫（Palermon）发现的，在它还没有消失在西方天空的短短6个星期里，还对其位置进行了几次观测。天文学家们接着等它在东方天空重新出现，但不论怎么找，再也没看见它了。根据对谷神星做的可怜的几次观测，高斯设法计算了它的整个轨道。结果，1802年元旦，布来梅（Bremer）的德国天文学家和物理学家奥尔伯斯（Heinrich Wilhelm Matthias Olbers，1758～1840）终于重新发现了那颗难以捉摸的小行星。高斯的这个计算也许比他一生所做的其他任何事情，为他带来了更大的名声，它也是高斯和奥尔伯斯多年友谊的开端。

有趣的是，上面故事的三个主人翁后来都光荣地名列天文学名词，第1000、1001和1002号小行星被分别命名为皮亚齐、高斯和奥尔伯斯。

41° 珍贵的纪念

高斯19岁那年，发现了可以用直尺和圆规画正17边形。高斯曾经说过，正是因为这个发现，他才最终决定以数学为他一生的事业。在一个狂喜而动情的时刻，高斯把他用欧几里得工具画的正多边形的小木板送给了大学朋友博莱（Wolfgang Bolyai）。博莱一生都珍藏着这块木板，作为对伟大数学家的珍贵纪念和崇高敬意。不知道它今天在什么地方。[16]

16 关于高斯的另一样珍贵纪念物，见《相约数学圈》S320。

42° 不寻常的荣誉

1903年，以慕尼黑德里加尔斯基（Erich von Drygalski）教授为首的德国南极远征队的三桅帆船命名为高斯；远征队发现的

一座火山命名为高斯山。

若干年后，美国政府买来那只大帆船，把名字改了，用于北美西海岸的航行。

43° 高斯的怀表

1855 年 2 月 23 日凌晨 1 点零五分，高斯停止了呼吸。伴随他大半生的怀表几乎同时停止了转动。

44° 高斯的大脑

高斯去世以后，征得家属同意，人们仔细度量了他的头骨和大脑。尽管他的脑回与众不同，但脑容量并不太大。拜伦、居维叶（Cuvier）和席勒的大脑更重一些，而但丁的更轻。高斯的孙子罗伯特（Robert Gauss）曾留下遗嘱，同意死后度量他的大脑。他的大脑比他伟大的爷爷还重三盎司。高斯的大脑，连同狄利克雷的大脑，今天还保存在哥廷根大学生理学系。

45° 数学家之王

1855 年 1 月 10 日，宫廷雕塑家赫斯曼（Christian Heinrich Hesemann）奉汉诺威王的旨意来到高斯家里，开始为大数学家制作大勋章。那时，高斯病入膏肓，没有多少时间了。1856 年 5 月 29 日，工作还没做完，赫斯曼就突然去世了。勋章接着是由汉诺威的另一个雕塑家多普梅叶（C. Dopmeyer）完成的。勋章后来嵌在高斯在哥廷根圣阿尔班斯（St. Albans）公墓的墓碑上。1855 年 2 月 23 日高斯刚刚去世，汉诺威王就命令为他做一个纪念章。这个 75 毫米的纪念章由汉诺威著名雕塑家布雷墨（Friedrich Brehmer）及时地（1877 年）做好了，作为原先勋章

的基座。在那个纪念章上刻着

Georgius V. rex Hannoverge

Mathematicorum principi[17]

17 汉诺威王乔治五世敬献给数学家之王。

从此，高斯成了“数学家之王”。

谢尔巴赫和格拉斯曼

谢尔巴赫（Karl Schellbach，1804 ~ 1892，卡约里说他生于1809年）和格拉斯曼（Hermann Günther Grassmann，1809 ~ 1877）两人的大半生都在给年轻学生讲数学，都有着深厚的宗教感情。谢尔巴赫生前名气很大，很受人尊重，不过在今天的数学圈里已经鲜为人知了，因为他的长处在于教数学，而不是创造数学。格拉斯曼则相反，他生前默默无闻，今天却名声远播，因为他的长处是创造数学，而不是教数学。历史就是这样评说功过的。

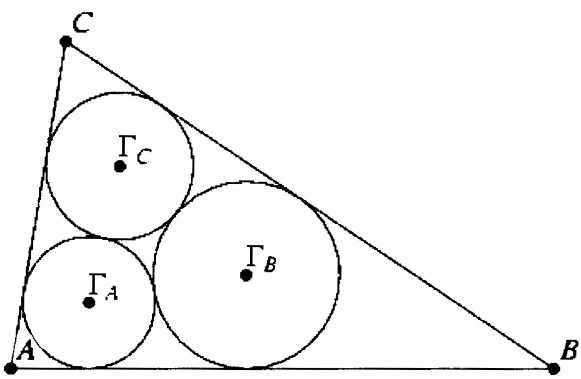
阿伦斯（W. Ahrens）博士在他迷人的小书《数学家轶事》（*Mathematiker-Anekdoten*）里为我们留下了许多谢尔巴赫和格拉斯曼的故事。我们在这儿重温这些故事，文字是根据埃德（Elwood Ede）先生的意译文本改编的。

46° 宣扬数学福音

谢尔巴赫是柏林威廉高级中学（Friedrich Wilhelm Gymnasium）的浪漫诗人和著名数学教授，把教数学当作宗教的天职，他相信数学家就是神职人员，应该把数学的福音和荣光呈现给尽可能多的人。他觉得，不论有天赋的还是有智能缺陷的人，都应

该走进这个神圣的天国。第五共和国总理（Fifth Reichskanzler）的祖父、文化部长贝特曼·霍尔维格（von Bethmann-Hollweg）曾评说谢尔巴赫的教学是"一首充满灵感的数学赞美诗"。为了让没有经验的老师学习谢尔巴赫的教学方法，文化部举办了由他领导的专门培训班。一大批年轻的数学家通过这些培训班学会了"老谢尔巴赫"的教学艺术。许多年轻人接着成为了真正杰出的中学老师。

[在数学上，今天人们记得谢尔巴赫的，主要是他关于斯坦纳（Steiner）推广的一般马尔法蒂（Malfatti）问题的优美的解析解。那个问题是，给定二次曲面的三条二次曲线，要求确定另外三条二次曲线，其中每一条都与给定的那两条和所求的另外两条曲线相切。]



马尔法蒂原来的问题相当于在三角形里放三个圆，要求它们的面积最大。

47° 谢尔巴赫的先驱

诺瓦利斯（Novalis，1772～1801）在谢尔巴赫之前就说过数学是宗教，数学家是宗教的神圣教士。他曾说，"上帝的生命是数学，所有的神圣使者都必须是数学家。纯数学是宗教。数学家

只不过是有福的人。”

关于作为神学分支的数学，见《走进数学圈》（294）最后一段德苏瓦（F. De Sua）的独特见解。

诺瓦利斯还有许多或许更有见识的关于数学的言论，参见《重游数学圈》（R223）。

48° 数学的危险

因格尔芬根（Prinz Kraft zu Hohlenlohe Ingelfingen，1827～1892）是普鲁士炮兵将军，写过几本军事学著作，曾是谢尔巴赫的学生。关于谢尔巴赫教授，他说，“数学是那么吸引学生，使他们对其他任何事情都感觉麻木，从这点说，它真是太危险了。”

49° 家庭作业

为了惩戒一个犯了小过失的学生，谢尔巴赫给他布置了一道家庭作业，要他做好后拿到教授家去。同学来了，可教授不在。于是，他把作业交给教授的一个女儿。第二天，他们在教室发生了如下对话：

谢尔巴赫：你昨天怎么没来？

学生：我来了，教授，还带来了作业。可有人说你不舒服。

谢尔巴赫：你把作业给谁了？

学生：你的一个女儿，教授。

谢尔巴赫：哪个女儿？

学生：我不知道她的名字，教授。

谢尔巴赫：她漂亮吗？

学生：是的，·教授。

谢尔巴赫：好的，那是弗洛伦斯。很好。

50° 美与真

德国大哲学家黑格尔说，“一个人若是不知道古典作品，那他至死也不知道美。”谢尔巴赫回应说，“一个人若是不知道数学家和科学家，那他至死也不知道真。”

51° 黑格尔的批评

帕勒莫的皮亚齐发现了小行星谷神星，有趣的是，宣布这个发现的时候，正值黑格尔发表言论，严厉批评天文学家没有更多地关注哲学。他说，哲学正好是那样一门科学，它将马上向天文学家们证明行星不可能多于七颗，因而它也将阻止他们荒唐地浪费时间去找什么以前从没发现过的东西。[18]

18 见 W. W. R. Ball《数学简史》。

52° 兴趣广泛的人

来自德国斯德丁（Stettin）的数学家格拉斯曼有着十分广泛的知识兴趣。他不单教数学，还教宗教、物理学、化学、德文、拉丁文、历史和地理。他写物理，也写德文、拉丁文和数学的教科书。在1848和1849的多事之秋，他与人合作发行了一种政治周刊。他对音乐感兴趣，曾在19世纪60年代为一家日报写歌剧评论。他讨论过德国植物的语言学，编过教会的论文，探讨过语音学法则，他编纂了《梨俱吠陀》词典，将《梨俱吠陀》译成诗歌，改编了三声部民歌，撰写了他的名著《扩张论》（*Ausdehnungslehre*），他有11个小孩，抚养长大了9个。他父亲是斯德丁

中学的数学和物理学老师，他的儿子赫尔曼（Hermann Grassmann，生于1859年）也成了数学家。父亲写过两本数学书，儿子写过射影几何的论文。

53岁那年，因为《扩张论》不大受欢迎，[19]格拉斯曼放弃了数学，将他巨大的知识能量转向梵文的研究，他在语言学领域的辉煌成就，赢得了普遍的欣赏，远远超过了他的数学贡献。格拉斯曼整个一生都生活在他出生的斯德丁城，只是在1834到1836年间去过柏林，接替斯坦纳（Jacob Steiner）为一所工业学校教数学。

19 参见《相约数学圈》（S297）。格拉斯曼的“扩张”是一种多分量的超复数，是比哈米尔顿的四元数更加大胆的一种思想。

53° 好策略

格拉斯曼上课的一个特征是所谓的 *Plauderminuten*（字面意思是，“闲聊几分钟”）。在他和认真的同学们紧张做数学的时候，他总会让大家停下来，海阔天空地说一会儿。他经常是坐在讲台上，然后大声喊一句，“闲聊几分钟。”

54° 有疑问的策略

有一次，在课堂上，几个不守规矩的捣蛋鬼扰乱了全班。格拉斯曼的恳求和警告，他们都当耳旁风。教授没有采取纪律措施，而是走下讲台，开始向上帝长久而大声地祈祷，请求他不要把孩子们的这种恶行列入他们的罪孽。他祈祷这些同学能因为上帝的仁慈而让自己学好，等等。他的这种办法似乎并没有彻底解决课堂纪律问题。

55° 原谅

有一次，一个九年级学生在宗教思想课上惹恼了格拉斯曼。

结果，愤怒的格拉斯曼竟然忘了在下课时像平常那样做祷告。那同学发现了这个疏忽，感觉很后悔，课后走到格拉斯曼面前，请他原谅。好心的老师自然原谅了他，还吻了他。

七个数学家一个诗人

七个数学家是博莱（János Bolyai）、狄利克雷（Peter Gustav Lejeune Dirichlet）、西尔维斯特（James Joseph Sylvester）、凯莱（Arthur Cayley）、雅可比（Carl Gustav Joseph Jacobi）、汤姆逊（William Thomson，即开尔文勋爵）、德摩根（Augustus De Morgan），一个诗人是朗费罗（Henry Wadsworth Longfellow），他们都出生在19世纪最初20年。

56° 错误判断

"你必须像憎恶一切恶行那样憎恶它；它会剥夺你的一切，你的乐趣，你的健康，你的休息，还有你一生的全部幸福。这无底的黑暗深渊将吞噬一千个牛顿；它永远不会在大地发光……"

［引自法卡斯·博莱1820年写给儿子雅诺斯的信，劝他不要研究平行公设。[20]］

20 关于博莱父子，参见《重游数学圈》R269。雅诺斯因为研究欧几里得第五（平行）公设，成为非欧几何的先驱之一。

57° 狄利克雷当老师

狄利克雷（1805～1859）被描述为一个有着高贵、真诚、谦虚品格的有同情心的人，但他似乎不会与年轻人交流。狄利克雷的儿子有个同学，忌妒他总能得到好父亲的帮助，儿子说了句悲哀而令人难忘的话："噢，我爸爸才不懂那些事情呢。"狄利克雷有个侄儿爱开玩笑，在纪念文章里写道，他在中学六七年级

时跟叔叔学数学，是他一生中的一段噩梦般的经历。[21]

21 埃德译自《数学轶事》。

58° 狄利克雷写信

狄利克雷礼貌而和善，但说话不多，很少进行书面交流。有一次，家里收到他写的一封信，那封信就当“珍贵文献”保存下来了。

狄利克雷第一个孩子出生时，没有写信向当时住在伦敦的岳父大人报告。后来岳父知道了，说他原以为狄利克雷“至少应该能写 2 + 1 = 3”的。这位幽默的岳父不是别人，正是门德尔松（Abraham Mendelssohn），哲学家摩西·门德尔松（Moses Mendelssohn）的儿子，作曲家菲勒克斯·门德尔松（Felix Mendelssohn）的父亲。[22]

22 岳父是银行家，而作曲家的门德尔松也许是这个家族最有名的人物，我们经常听到的他的作品有《仲夏夜之梦序曲》、《意大利交响曲》。埃德译自《数学轶事》。

59° 积分通知

1854 年夏，阿伦特（G. Arendt）教授在柏林大学听了狄利克雷的系列讲座，后来在 1904 年将它们编辑出版。下面的故事出自阿伦特教授的一封信。

事情大概是这样的。狄利克雷病了，只好推迟“定积分”的讲座。他用小字写了一张便条贴在 117 室的门上，通知同学们：

> 因为生病我今天不能上课。
>
> ——狄利克雷

狄利克雷一个多星期没来，便条也一直贴在门上。最后，一个同学把便条改成了下面的定积分形式：

$$\int_{复活节}^{米迦勒节}(因为生病我今天不能上课)\,d\,(1\mathrm{Frdor})$$

——狄利克雷

应该注意，1 Frdor 即 1 Friedrichsd'or，是按惯例给讲座的酬劳，而米迦勒节(Michaelmas)是纪念米迦勒的节日，在 9 月 29 日。[23]

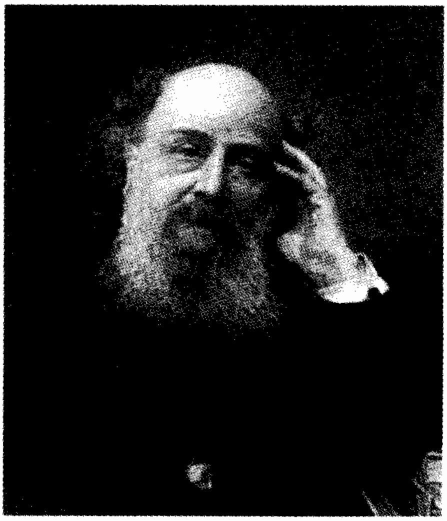
［这令人想起同学修改汤姆逊教授的类似通知的趣事，见《重游数学圈》R348。］

23 积分的意思是狄利克雷要从复活节(3 月 21 日或其后月圆后的第一个星期天）病到米迦勒节，时间越长，挣的酬劳越多。埃德译自《数学轶事》。

60° 西尔维斯特说图论

西尔维斯特（J. J. Sylvester，1814 ~ 1897）解释图论的抽象性说：

“分叉的理论是一种纯粹的综合，因为它不考虑大小和位置；它也用几何的直线，但它们不具有在谱系图中为了解释生殖定律而具有的任何意义。”（穆瑟）



西尔维斯特

61° 心不在焉

下面的故事虽然未必真实，但说明了西尔维斯特也是出了名的心不在焉教授。

西尔维斯特刚从英国到约翰霍普金斯大学，就被邀请在学校发表一个正式的讲话。他本来为讲话准备了稿子，但在主持人向大家引介之后走上讲台时，稿子找不着了。他请求以后再讲。他回到办公室，又彻底地找了一遍，还是没能找到那个稿子。他断定稿子被遗忘在英国了。于是，他漂洋过海回去找。他回到家里，经过仔仔细细的搜索，最后终于找到了——就在他口袋里。（穆瑟）

62° 新名字

詹姆斯·约瑟夫（James Joseph）是亚伯拉罕·约瑟夫（Abraham Joseph）最小的孩子，1814 年 9 月 3 日生于伦敦。家里的老大后来移民美国，因为某种理由（现在不知道了），改姓了西尔维斯特。[24] 于是，一家人都跟着改了。从此，詹姆斯·约瑟夫就叫詹姆斯·约瑟夫·西尔维斯特，简称 J·J·西尔维斯特。

24 约瑟夫一家是正统的犹太人，却用了一个犹太人讨厌的基督教的姓氏，自然有些奇怪。

63° 西尔维斯特第一次接触美国

西尔维斯特的美国哥哥是一名保险计算员，他向美国彩票承包商会的主席建议，将困扰他们的一个排列难题交给他那时才 16 岁的弟弟詹姆斯。詹姆斯完全而令人满意地解决了问题，得到了 500 美元的奖金。

64° 西尔维斯特与音乐

西尔维斯特除了对诗歌感兴趣，还喜欢音乐，而且是一个有成就的业余音乐家。他曾一度跟著名法国作曲家古诺（Charles Francois Gounod）学声乐，偶尔在工人集会上为他们唱歌。据说，他引以自豪的倒不是他的不变量理论，而是他的男高音嗓子。

65° 无意剽窃

数学中的剽窃并不总是有预谋的，有时纯粹出于无心。下面是西尔维斯特自己的一个例子，见《皇家学会哲学会刊》（1864）642页。

“凯莱教授后来告诉我，我怀疑其出处的那个定理可以在施拉弗里（Schläfli）的 *De Eliminatione* 中找到。这不是我第一次在无意中剽窃了那位著名数学家的成果，我们有着深厚的情谊。更显眼的一个例子是我发表在 *Comptes Rendus*[25] 上的一篇短文，讨论二次曲面上的27条直线，我相信，我在文章里（像梦游似的）沿袭了施拉弗里一篇文章的部分核心内容，连名词和符号都一样。他那篇文章发表在《数学杂志》，杂志封面的编辑中还有我的名字呢。”

25 《法国科学院报告》，参见《重游数学圈》（R272）。

66° 凯莱发火

凯莱（Arthur Cayley，1821 ~ 1895）是一个非常真诚而平和的人，遇事总能从容不迫。人们只见他有一次失去冷静。大概有一天，他和朋友西尔维斯特正在他的律师办公室里讨论不变量理论，[26]仆人进来递给一叠要他仔细审看的法律文书。他正同西尔

26 凯莱在1849年获得律师资格，然后耐着性子做了14年的律师“苦役”。不过，他在那期间发表了300多篇数学论文。

维斯特谈到兴头上，突然插入这么一堆阴沉的东西，令他大为光火。他从办事员手中抓过文件，厌恶地大吼一声，将它们扔在地板上，然后接着谈数学。

67° 凯莱的文章风格

1895 年凯莱去世不久，福赛斯（A. R. Forsyth）在《伦敦皇家学会进展》（58 卷）上写了一篇对大数学家及其作品的“欣赏”。他还在文中谈了凯莱的风格：

“当凯莱达到最高级的一般化情形时，接着就通过这样那样的方法来直接确立它们，不过他很少透露他最早是如何想到它们的，似乎不想让他的论文读起来更容易……

“他的文字风格是直接、简单而明快。律师训练不仅影响着他对材料的安排，也影响着他的表达方式；于是，他的文章很朴素，与激情洋溢的西尔维斯特的文章形成奇妙的对比。”

68° 再说雅可比兄弟

《走进数学圈》（344）讲过人们经常分不清数学家雅可比（Carl Gustav Joseph Jacobi，1804 ~ 1851）和电版发明者雅可比（Morita Hermann Jacobi，1801 ~ 1874）。有一次，数学家雅可比被人错当成哥哥了，他回答说，“很抱歉，先生，我不是我，我是我弟弟。”

卡尔的许多朋友都知道兄弟混淆的事情，他们了解卡尔喜欢幽默，就经常借混淆来开玩笑。例如，卡尔很仰慕英国天文学家和数学家索莫维尔（Mary Sommerville，1780 ~ 1872），二人同在罗马时，他常去拜访她。他每次去的时候，她都称他“Monsieur，votre frere.”（“兄弟先生”），总令他暗自发笑。

卡尔是狄利克雷教授夫妇的亲密朋友。有一次，夫人给他送来圣诞礼物，在上面写着，“al fratello del celebro Jacobi”（“给著名的雅可比的兄弟”）。

还有一次，一个漂亮小姐问卡尔是不是那个著名的雅可比的兄弟，他回答说，“不，可爱的小姐，他是我的兄弟。”这令我们想起庞加莱和他著名堂兄的故事。[27]

27 见《相约数学圈》S163。

69° 雅可比的幽默

雅可比随处表现出幽默。有一次，他和许多学者去听他的朋友、天文学家贝塞尔（F. W. Bessel，1784～1846）的演讲。演讲结束时，有学者抱怨贝塞尔没讲什么新东西。雅可比回答说，“是的，朋友，如果贝塞尔今天早晨没有在散步的一个钟头里给我解释他的演讲，我也会听不懂的。”[28]

28 埃德译自《数学轶事》。

70° 哈弗尼克事件

雅可比幽默的另一个例子发生在他在哥尼斯堡大学做老师的时候。那时，正统神学家哈弗尼克（Hävernick）接到去“Albertina”的任命[29]。学生们都不喜欢哈弗尼克，因为早在10年前，他在哈雷（Halle）上学时，就是迫害理性主义神学家格塞尼乌斯（Gesenius）和维谢德（Wegscheider）的告密者。结果，当哈弗尼克来哥尼斯堡讲第一课时，学生们就发起一场运动。他们策划，大家都集中到演讲厅去，让哈弗尼克误以为大家都欢迎他。但等他讲第一个音节，大家就如潮水般地涌出大厅，把他一个人晾在讲台上。哈弗尼克十分恼怒，要求学校评议会开听证会，开除闹事的学生。校长、解剖学家伯多奇（Burdoch）向哈弗尼克编了一个借口，说同学们是因为大厅太热、太火爆才离开的。雅

29 哥尼斯堡大学原来的名字。

可比对此评论说，不管怎么说，因为只需要三个学生就能组成一所大学，所以，只应该处罚最后离开大厅的三个学生。[30]

30 埃德译自《数学轶事》。

71° 雅可比策略

雅可比看不起那些自大浮夸的人。他曾说："如果要我和一个暴君或外国的部长说话，我会想方设法先令他失望。"

72° 天才学生

雅可比是很出色的学生，所有老师都欣赏他。他多才多艺，很小的时候就写过诗。在学校的一次集会上，他背诵过自己写的诗，那诗还是用希腊文写的。

73° 对学生的忠告

S·P·汤姆逊在《开尔文勋爵的一生》(1910) 中讲了一个有趣的关于著名数学物理学家威廉·汤姆逊（即开尔文勋爵）的助手的故事：

> 一个新同学的父亲带着孩子来学校，他把汤姆逊教授的忠实助手麦克法兰（Donald McFarlane）拉到一边，央求他告诉他儿子该怎么做才能讨教授喜欢。"你想你儿子得到教授的喜欢?"麦克法兰问。"是的，"那个父亲回答。"好啊，那他必须有一肚子的数学!"

74° 显而易见

写论文的时候，汤姆逊教授（开尔文勋爵）常在某个数学陈述前面冠以"显而易见"几个字，令他的读者大为疑惑，因

为那个陈述当然不是前面的数学论述的显而易见的结果。对汤姆逊来说，那些结论从物理学的理由看是显而易见的，但那些理由对不论多能干的数学家来说，也不是随便能想到的。

75° 生命法则？

德摩根（1806～1871）在《悖论集》中讲过下面一个古怪的故事。

> 几天后，我去看他［《走进数学圈》306 中说的那个保险业务员］，严肃地告诉他，我们已经在他崇敬的卡莱尔（Carlisle）表中发现了人类寿命的法则。[31] 我告诉他，法则处于下面的背景中：把寿命表拿出来，随便选一个年龄，以它为期望值，然后取最接近的整数为新的年龄，做同样的事情，如此等等。然后，从你喜欢的年龄开始，你一定会在某个地方终结，经过的年龄等于或几乎等于期望的。
>
> “你该不是说总会这样的吧？”
>
> ——“试试看。”他试着做了，一次又一次都得到我说的结果。
>
> “这确实是很奇怪的事情，真是一个了不起的发现！”我本可让他四处鼓吹这个生命法则，但于心不安，还是告诉他，任何数表都会出现那种情形，只要它的第一行数字逐渐增大，而第二行数字逐渐减小……

31 1815 年，米尔恩（Joshua Milne）根据卡莱尔的海歇姆（John Heysham）医生在 1779～1787 年间的观察而制作的人类死亡率表。

76° 字谜

德摩根在《悖论集》中说，有人为他的名字编了 800 个颠倒字母的字谜，他大概看过 650 个。多数都是拉丁文的，下面是

两个英文的：

Great gun! Do us a sum!

Go! Great sum! $\int a^{u^n} du$

他认为第一个是对他的追求的嘲笑，而第二个更有品味。

77° 抛射体问题

经常有那样的情况，即好数学问题是在文学作品的某些段落中提出来的。历史上最有名的例子大概是倍立方问题，似乎最早是一个没上过学的无名的希腊诗人在一段诗歌里提出来的，那首诗讲的是神话中的米诺斯王和他儿子格劳卡斯（Glaucus）的立方体坟墓的故事。我们也许还记得欧拉从维吉尔《埃涅伊德》的一行诗联想到一个力学问题的故事。这些例子都在《走进数学圈》（246）中讲过了，在那儿同时还讲了若干年前《美国数学月刊》问题专栏里的一个有趣的几何问题，那是从斯特拉瑟（Jan Struther）的《米尼弗夫人》（*Mrs. Miniver*）[32]的几行文字引出的。这样的例子还有很多，我们很容易写出一本有趣的来自文学作品的数学问题的小小专著。

下面是在沃尔顿（Willam Walton）《力学问题集》中看到的例子，它出自朗费罗（Henry Wadsworth Longfellow）的《海华沙之歌》（*The Song of Hiawatha*）。这首著名长诗发表于1855年。原诗以斯库尔格拉夫特（Henry Rowe Schoolcraft）关于北美印第安部落的两本书为基础，以芬兰史诗《英雄的国土》（*Kalevala*）的扬抑格韵律写成，立刻获得了巨大成功。[33]下面就是将沃尔顿带回19世纪中叶的那几行诗句：

32 Jan Struther 是一个笔名，原名 Joyce Anstruther，后来叫 Joyce Maxtone Graham，最后叫 Joyce Placzek（1901－1953），英国作家，最有名的就是她塑造的米尼弗夫人，同名电影的中译名为《忠勇之家》，是第二次世界大战时期拍摄的一部战争文艺片。

33《海华沙之歌》是美国人写的第一部印第安人史诗（德沃夏克《第九交响曲》（新世界）就以它为素材），下面引的几行见原诗第四章。

海华沙疾步如飞；
他射出一枝飞箭，
自己也飞奔向前，
看那箭落在后面！
海华沙臂力无穷，
将飞矢射向天空，
他射得多强多快啊，
第十枝飞箭离弦，
第一枝还在蓝天。

瓦尔德根据这些诗句提出下面的问题：

假定海华沙能每秒射出一枝箭，而且，当箭不垂直射出时，能飞出最远的距离。那么请证明，海华沙与飞箭赛跑，总会跑到它们前面。

埃尔米特



埃尔米特的两个最有意义的基本数学结果，是他 1858 年利用椭圆函数对一般五次方程的解，和他 1873 年 e 是超越数的证明。埃尔米特对五次方程的解后来引出一般 n 阶方程的根可以借助福克斯函数用方程的系数来表达，而他证明 e 是超越数的方法，在 1882 年被林德曼（Linde-

mann）用来证明 π 也是超越数。

埃尔米特 1822 年 12 月 24 日出生在迪厄泽（Dienze），1901 年 1 月 14 日在巴黎去世。他虽然写的东西不多，但多数论文都在讨论有重大意义的问题，而且他的方法表现了高度的独创性和广泛的适用性。他经皮卡德（Emile Picard）编辑的文集有四卷。从下面几个故事，我们能看到一个更有人情味的埃尔米特。在前几个数学圈里我们几乎没有讲过他的故事，现在也算弥补这个重大缺陷。

78° 埃尔米特的弱点

人总是受各种弱点的折磨，数学家也未能幸免。想想看，桑德森（Saunderson）几乎一生下来就双目失明，欧拉也在黑暗中度过晚年，克里弗德和阿贝尔因为肺结核早逝，希尔伯特患有严重的恶性贫血症。这样的例子还能列举很多。

埃尔米特生来就右腿残疾，终身跛足，走路要靠拐杖。这个缺陷足以扭曲人的个性。然而，埃尔米特没有屈服，他始终怀着快乐的心境，认识他的人都很喜欢他。埃尔米特残疾的一个好结果是，他可以不服兵役；而坏结果是，他在巴黎理工学院学过一年后，就被剥夺了继续学习的机会，当局认为他的残疾不适合本校成功学生的任何岗位。

79° 甘为人梯

很多著名数学家都慷慨帮助年轻人的奋斗。埃尔米特也被认为是这样的人，而且是整个数学史上最好的代表。

80° 考试的准绳

埃尔米特和伽罗瓦都是巴黎路易大帝高中不听话的学生，他们对课堂讲的初等数学漠不关心，考试成绩老是很差。学校的理查德（Richard）教授想挽救伽罗瓦，可惜失败了；他也帮助过埃尔米特，幸运地成功了。任何厌恶考试的人都会同情埃尔米特和伽罗瓦，而两个杰出数学家的经历，也令人对那些拿考试做准绳来衡量知识能力的人表示怀疑。

埃尔米特在路易大帝高中写过两篇论文，其中一篇非常优秀，被《数学纪事》（*Nouvelles annals de mathématiques*）接受了，那是1842年创刊的一个杂志，旨在激发高中学生的数学兴趣。理查德教授忍不住告诉埃尔米特的父亲说，他的儿子查尔斯是“小拉格朗日”。

后来，在1842年，才20岁的埃尔米特参加了巴黎理工学院的入学考试。尽管他的数学在报考者中出类拔萃，总分却令人蒙羞地排第68名，勉强达到录取标准。有讽刺意味的是，他在1848年得到的第一个学术职位，就是做这个5年前差点儿不要他的理工学院的入学考试的考官。

81° 改变传统

很多年轻数学家都娶了教授的女儿。读者大概还记得，《相约数学圈》（S322）里讲了一个特别的“遗传定律”：“数学能力不是从父亲遗传给儿子，而是从岳父遗传给女婿。”不过，埃尔米特多少改变了这个传统，他娶的不是教授的女儿，而是教授的妹妹——1848年，他和伯特兰（Bertrand）教授的妹妹路易丝（Louise）结婚了。

82° 埃尔米特的转变

埃尔米特年轻时，和当时许多法国科学家一样，是一个宽容的不可知论者。但在1856年，他突然得了重病。柯西本来对埃尔米特开放的宗教观表示惋惜，于是在他身体虚弱的时候给他做工作，把他拉进了罗马天主教。埃尔米特后来就成了一个虔诚而满足的天主教徒。

83° 埃尔米特的神秘

数学存在是一个有争议的大问题。例如，数学对象和它们的性质是否已经存在于某个属于它们自身的永恒而朦胧的地方，我们只是漫步在那片土地而偶然发现了它们？在这片朦胧的土地上，三角形的三条中线总是交汇在一点，三分每一条中线。也许是某个在思想里漫步其间的古人，偶然碰到了这个业已存在的性质。在这片朦胧的土地上，还存在着许多其他令人惊奇的几何图形的性质，但还没有人和它们相遇；即使有的话，也在很多年以后了。在这片朦胧的土地上，自然数和它们美妙的性质也是存在着的，总是等着有人去漫步的时候，它们才会出来相见，走进人类现实的世界。

毕达哥拉斯和他后来的许多数学家都欣赏上面这个数学存在的图景。埃尔米特也坚定地相信存在那片朦胧的土地。对他来说，数及其美妙的性质总有着其自身的存在，只是某个数学哥伦布偶然遇到了它们，然后向世人宣布他的发现。[34]

34 关于数学的发现和发明，读者可以参考《相约数学圈》(S355)。

84° 埃尔米特的国际主义

在这个充满血腥和民族仇视的世界，很多科学家将敌国的科

学成就看成坏科学，而他们自己国家的是好科学。数学家也没能摆脱这种狭隘的观点。例如，在第二次世界大战期间，同盟国的许多数学家认为“日耳曼”数学畸形而下流，许多德国数学家则认为“犹太”数学邪恶而有害。埃尔米特从来不懂数学和科学的这些党派之争，他认为自己是法兰西的爱国者，对他来说，数学和科学就是数学和科学，没有民族和宗教的局限。

85° 说凯莱

凯莱去世不久，埃尔米特在科学院《报告》（*Comptes Rendus*, t. 120, 1895, p. 234）的一篇文章中写道，“凯莱的数学天才，表现在他的清晰明澈和极其精妙的解析形式；而作品的无与伦比的容量，更使他成为堪与柯西比肩的大学者。”

卡洛尔

所有的数学家都仰慕卡洛尔（Lewis Carroll, Charles Lutwidge Dodgson），下面是他的几个故事。

86° 卡洛尔和小猫

卡洛尔非常喜欢小动物。有一次，他出门看见一只小猫的嘴被渔钩钩住了，就把小猫带去看医生。医生给小猫取鱼钩时，卡洛尔一直抱着它，爱抚它。医生听说小猫不是卡洛尔的，就不要他付钱了。然后，卡洛尔把小猫抱回他看见它的地方。

87° 卡洛尔和马

还有一次，卡洛尔看见几匹马套着缰绳在干活儿，马在缰绳

的束缚下显然很不舒服。卡洛尔的怜悯油然而生，他说服赶马的人把缰绳取下来。马儿摆脱了羁绊，脖子灵活了，活儿也干得更欢更快了。

88° 卡洛尔和肉

在卡洛尔时代，屠夫杀动物取肉时从不考虑动物的感受，卡洛尔极力主张在杀动物时要让它们不感觉痛苦。

89° 误会

鲍威尔（York Powell）是牛津大学现代史钦定讲座（Regius）教授,[35]他记录了道奇森教授（即卡洛尔）给他讲的一个笑话。阿姨抱小孩儿上床睡觉时，听小孩儿叫喊，“阿姨，我的脚，我的脚。”小阿姨把孩子从小床抱起来，用醋和着热水给他洗了脚，还给他喝了热牛奶。等她再抱孩子上床时，小孩儿又叫喊了，“阿姨，我的脚，我的脚。”阿姨只好再把孩子抱起来，可没看出有什么问题。为保险起见，她又拿醋和热水给他洗了脚，小心翼翼给他擦干，然后把睡意蒙胧的小家伙抱回床上。突然她又听见了叫喊，“阿姨，我的脚，我的脚。”于是，她举灯检查，才发现小孩儿的哥哥们玩儿恶作剧，把小床弄短了，孩子不能舒服地伸直双腿。

35 钦定讲座教授是英国皇家在牛津、剑桥、爱丁堡等大学设置的教授。

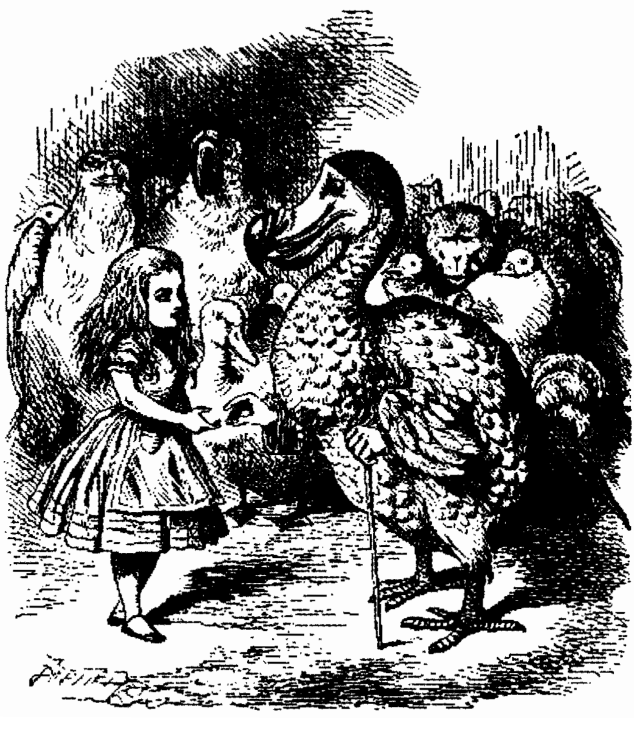
90° 卡洛尔的壁炉

卡洛尔在基督教堂的书房里有一个壁炉，壁炉两边和上面是16块方形瓷砖，它们上面横着一块长长的长方形的瓷砖。正方形瓷砖装饰着动物图样，壁炉开口上面的长方形瓷砖画着一艘大船。小朋友来书房看卡洛尔时，他就借着瓷砖上的那些动物给他

们讲又长又可乐的故事。他解释说，那只叼着鱼的鸟和它左肩膀上方那条高傲的大龙，以及其他动物，代表他接待客人的不同方式。

壁炉中央的大船后来成了贝尔曼（Bellman）掌舵的那艘有名的船，不过他掌舵还挺费劲的，因为“船头的帆桅和船舵绞在一起了”。但是，

> 主要问题还是发生在航行的时候，
> 贝尔曼手足无措，困惑而紧张，
> 他说他希望，至少当风向东吹时，
> 船儿不会向西航行。



爱丽思和动物的圆圈赛跑（《爱丽思漫游奇境》第3章）

方形瓷砖上的动物走进了卡洛尔的许多作品。例如，右下角的海狸，在《大白鲨之猎》（*The Hunting of the Snark*）[36]中只有布切尔（Butcher）知道怎么猎杀它。右上角的那只小鹰，在《爱丽思漫游奇境》里参加过圆圈儿跑（Caucus Race）[37]，它的下面是一只半狮半鹫的怪兽（Gryphon）。左边最顶上的两块瓷砖是一只鹦鹉和一只渡渡鸟，也参加过赛跑。左下角的小鹿一样的动物，在《爱丽思镜中游》里，连自己的名字都忘了。





睡觉的 Gryphon（Sir John Tenniel 为卡洛尔作品画的插图）

36 这是卡洛尔的一部荒诞的叙事诗，snark 是假想的怪物。Bellman 和 Butcher 都是诗中角色。这儿引的几行见诗的第二章；插图是 Henry Holiday 画的。

37 Caucus 原指政党人物开会，卡洛尔开玩笑借来说动物们围着圆圈儿跑。

第二象限

从柏拉图到阿丁

杂　谈

我们走进第二象限，从各色人物的故事说起——从培根到哈代。

91° 柏拉图的对立面

麦考利（Thomas Macaulay）在他 1837 年论培根的文章中说，“他［培根］假定人类幸福是知识的最终目标，从而断言数学科学最多不过是其他科学的附属和补充。他说，数学科学是自然哲学的女仆，应该摆正自己的位置；他声称他在任何情况下都不可能想象一个仆人敢说超越了她的女主人。”接着，麦考利进一步表达了对培根的支持：“如果说培根在这儿错了［仅凭实用来估价数学］，那么我们必须承认，我们宁愿犯他这种错误，也不喜欢柏拉图的对立的错误。我们忍受不了他们的哲学，就像古罗马的为了保持体形而吞下早产儿的太太们，因为害怕丑陋，宁愿承受不育的痛苦。”

其实，培根和麦考利对数学成就的真正本质都十分无知。正如德摩根在 1872 年的《悖论集》中说的，“如果牛顿以培根为导师，那他就不是牛顿，而别人可能成为牛顿。”

92° 难以置信



约翰逊(1709 ~ 1784)

我们有关约翰逊（Samuel Johnson，1709 ~ 1784）的知识，都来自他的朋友、律师鲍斯维尔（James Boswell）写的杰出传记。鲍斯维尔在传记里说，“约翰逊博士觉得（或自以为觉得）他的想象力错乱了，他只好不停地求助于算术的学习。”

93° 风格的对比

鲍尔（W. W. Ball）在他的《数学简史》中，饶有兴趣地对比了拉格朗日、拉普拉斯和高斯的风格。“现代分析大师是拉格朗日、拉普拉斯和高斯，他们同处一个时代。有趣的是注意他们迥然不同的风格。拉格朗日的形式和内容都是完美的，他小心翼翼解释每一个过程，尽管论证是一般性的，也容易理解。拉普拉斯则相反，他不解释任何东西，对风格漠不关心，只要结果正确，他就满意了，不在乎是否有证明或证明是否存在错误。高斯和拉格朗日一样精确和美妙，但比拉普拉斯更难理解，因为他把引出结果的每一步痕迹都抹去了，他追求严密然而尽可能简洁和综合的证明。”

94° 阴影

有时候，卓越的数学家会生活在不那么有才能的亲戚的阴影下。我们也许还记得亨利·庞加莱和他的表兄雷蒙（见《相约数学圈》S162）和雅可比兄弟（《走进数学圈》344 和本卷 A68）的故事。另一个类似的例子是牟比乌斯（Augustus Ferdinand Mobius）和他的儿子。父亲 1790 年出生在萨克森（Saxony），起初错学了法律，后来成为数学家。1813 和 1814 年，他作为高斯的学生，接受了系统的天文观测和计算的训练。1815 年，他成为莱比锡大学讲师，并在那儿度过余生。1816 年，他成为特殊的天文学教授，后来又成为普雷森堡（Pleissenberg）天文台台长。1844 年，他被提名为大学的高等数学和天文学教授。经历了非凡的一生之后，他在 1868 年去世。

根据泰茨（Heinrich Tietze）的说法，牟比乌斯有一个儿子

成了著名的神经学家，他关于“女性的心理学弱点”比他父亲更卓越的数学工作吸引了更多人的注意。

95° 聪明的学生

还在吕纳堡（Luneberg）的约翰纽姆（Johanneum）中学读书时，黎曼就表现了出众的数学才能，于是，数学老师施马尔福斯（Schmalfuss）允许这个小孩儿随意安排他的数学课时间。施马尔福斯本人也算得一个数学家，他意识到黎曼已经掌握了中学的所有数学。

96° 完美主义者

黎曼在中学的各科成绩都是拔尖的，他当然也非常勤奋。但因为追求完美，他很少按时交他重要的作业。他的宿舍主人很严厉，一直监督着他不要虚度时光。不过他的作业还是晚了。黎曼老是不满意自己的作业，撕了一张又一张，然后重新开始。结果，孩子经常受到处罚，被关进学校的禁闭室去补作业。就这样，即使在禁闭中，他最后还是写出了一篇近乎完美的论文，继续为他挣得最高的分数。

后来，黎曼也表现着追求完美的耐性。为了让自己满意，他曾花很长时间写他的博士论文。结果是同样拖了很长时间他才被提升为哥廷根大学的正教授。

97° 美妙的结果

福克斯（Lazarus Fuchs，1833～1902）以微分方程出名，出生在波森（Posen）附近。他从柏林大学开始了漫长的教学生涯，然后去了哥廷根和海德堡的格雷福斯瓦尔德（Greifswald）大学，

1884 年回到柏林成为教授。1865 年，他开辟了线性微分方程的新理论。

人们常说起福克斯的一堂微分方程课的故事。他经常不备课就上讲台，喜欢在黑板上完成细节。结果是他偶尔会出错或走进死胡同。一次上课时，为了推导一个需要的关系，他在黑板上写满了一大堆通过替换得到的复杂方程。突然，那些方程一下子抵消完了，得出 0 = 0 的恒等式。教授感到疑惑而尴尬，在黑板前走了一小步，嘟囔着一定哪儿出错了。最后，他转身对同学，眨眨眼说："不过，零等于零是一个非常美妙的结果。"这堂课就结束了。在接下来的课上，福克斯绕开了所有问题，只写出他原来需要的结果，然后从它们开始讲起。

98° 多能的天才

赫姆霍兹（Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz）1821 年出生在波茨坦，先在柏林学医，1842 年做了那儿的卡雷特（Charite）医院的助理外科医生。第二年，他到波茨坦做军医，但 1848 年又回柏林在艺术学院教解剖学。1849 年，他被任命为哥尼斯堡的生理学教授。6 年后，他到波恩做解剖学和生理学教授。1858 年，他被任命为海德堡的生理学教授。在生理学方面，他做了人类神经系统的先驱性研究，第一个测量了神经脉冲的速度。除此而外，他还发明了医用的检眼镜。他的生理学研究需要很多物理学知识，于是他用功学物理，成了杰出的物理学家。在物理学上，他开展了声学和光学的先驱性工作，帮助证明了能量守恒定律，发展了电磁学理论。1871 年，他以物理学教授的身份回到柏林，1888 年成为夏洛腾堡（Charlottenburg）皇家物理技术研究所所长。为了物理学的创造性研究，他迫切需要很多数

学，于是他又成了当时一流的数学家。除了应用数学的工作外，赫姆霍兹的贡献还表现在几何（特别是非欧几何）领域。1894年，他在夏洛腾堡去世。

关于赫姆霍兹，克里福德（William Kingdon Clifford）写道，“赫姆霍兹——一个生理学家，他为了生理学学物理，又为了物理学数学，现在成了三个领域的一流专家。”

99° 想词儿

怀特海（Alfred North Whitehead，1861～1947）曾就某种逻辑理论警告一个同学：“你必须用一颗，嗯……嗯……嗯……”几乎过了一分钟，怀特海还没找到恰当的词儿，这时同学建议，“一颗盐吗，教授？”

“哦，是的，”怀特海很高兴，“我知道那是一种化学物质。”（穆瑟）

100° 怀疑论

有人说，只有三个人通读了罗素和怀特海的三大卷《数学基础》，即罗素、怀特海和校对员。不过，罗素和怀特海是不是通读过，还存在疑问。（穆瑟）

101° 希尔伯特的记忆

哈瑟（Helmut Hasse）1972年3月来缅因州立大学访问，讲了一个有趣的他和希尔伯特的故事。故事说，哈瑟想让希尔伯特夫人谈谈对她的大数学家的个人看法。于是，一天下午，夫人请他喝茶，然后把他和丈夫留在花园，自己走了。哈瑟他们马上就开始讨论起类域理论——希尔伯特创立的理论，而哈瑟很感兴

趣，曾写过一个报告，发展了希尔伯特以前的工作。哈瑟开始对希尔伯特讲他新做的一些工作。克希尔伯特老是打断他，坚持要哈瑟先向他解释类域论的基本概念和基础。哈瑟照着做了，希尔伯特也产生了兴趣，最后大声说，“所有这些真是太美妙了，谁发明的？”哈瑟只好告诉满怀惊奇的希尔伯特，正是他老人家创立了那个美妙的理论。[1]

1 这令我们想起希尔维斯特的一个类似的故事（见《走进数学圈》353）。

102° 希尔伯特和他的水煮蛋

第一次世界大战期间，一个同事在希尔伯特去大学的路上碰到他。“你好啊，希尔伯特教授。”

“噢，很糟糕。”希尔伯特回答。

“怎么啦？”那人又问。

“我太太想谋害我。”

听了这话，同事非常惊讶。他说他不相信，因为他很了解希尔伯特太太是很关心先生健康的。希尔伯特告诉他，自从他们结婚起，太太每天早晨给他煮两只鸡蛋，可今天早晨她才煮了一只鸡蛋，他想同事应该理解他是多么震惊！（那时，德国已经开始定量供应食品了。）

103° 希尔伯特和他的破裤子

在草莓成熟的季节，希尔伯特喜欢在星期六下午和他的研究班学生一起骑车远游。某年的这个时候，学生们看见他们的教授天天骑车来学校，裤子在座位的地方有一条长长的口子。因为对教授的尊敬，同学们没有告诉他裤子裂开了。他们打算等到去尼柯劳斯堡（Nikolausberg）乡村远游时再告诉他——他们要为新鲜的草莓和乳酪狂欢。等到了那儿，他们才告诉希尔伯特，“教

授先生，就在刚才，您下车的时候把裤子撕破了。”可希尔伯特回答说，“不，先生们，它已经破了两个星期了。”（哈瑟）

104° 不同寻常的访问

阿达玛（Jacques Hadamard，1865～1963）说，他做数学杂志编辑时，从一个陌生人那里收到几篇相当不错的论文，就请那人共进晚餐。那人回信说，由于环境的原因，他不能接受邀请，反过来请阿达玛去访问他。阿达玛去了，惊奇地发现那人被关在罪犯的精神病院里。他显然很健全，却杀了自己的姨妈。那人的名字叫布罗克（A. Block），是一个了不起的数学家。

105° 认真的读者

兰道（Edmund Landau，1877～1938）曾收到一篇学位论文要他评审，他很久没有给人回信。几个月后，寄论文的人看见兰道，问他是否读过论文了。兰道回答说，“Ya，Ich habe es grundlich durchgebletert.”[2]（穆瑟）

2 “是的，我从头到尾看了一遍。”

106° 座位牌

兰道为毕业生举行一年一度的宴会。他不像通常那样写座位牌，而是做了一些卡片，从学生的论文里抄录特别的话或公式。有个同学的学位论文一点儿进展都没有，他不知道自己的卡片上会写什么。结果他很容易就找到了位置，那儿是一张空白的卡片。（穆瑟）

107° 连续性

哈代（G. H. Hardy，1877～1947）教授不愿意浪费时间重

复自己以前讲过的课——他希望学生们已经把学过的东西记在脑子里了。有一次，他在剑桥大学举行系列讲座，中间隔了一个很长的假期。在假期过后的第一课上，哈代教授走到黑板前，拿起粉笔边写边说，“由此可见……”（杰克逊）

108° 百分之百的成功者

1933 年我去哈代在三一学院的家时，看见壁炉上挂着三幅画，列宁、耶稣和霍布斯（Hobbs，英国当年的板球明星）。我问为什么选这么三位，哈代说，在他看来，他们是仅有的少数的把全身心都献给了自己事业的重要人物。（哈瑟）

109° 哈代智斗上帝

[在《重游数学圈》R298，我们见过波利亚讲的哈代“智斗”上帝的故事。好故事总是有不同的说法，这个故事也不例外。下面是哈瑟版的哈代故事，其中以费马大定理取代了黎曼猜想。]

哈代声称他相信上帝存在，然而是他个人的敌人。有一次，哈代要乘飞机去法国开会。他害怕空中旅行，走的时候犹豫不决。最后他还是去了，不过留下一张便条，要秘书在他动身后打开。便条打开了，只见上面写的是，“我刚发现了费马大定理的证明，等法国开会回来后就补充细节。”他的同事们感到十分振奋。哈代回来时，他们立刻就抓住他问“那个证明呢？”

“哦，那个嘛，”哈代回答，“那只是为了保险。我想，上帝为了不让我享有证明费马大定理的荣誉，这次旅行是不会为难我的。”

爱因斯坦

或许没有一个现代的数学家能比爱因斯坦（1879～1955）更广为人知，受人尊崇，而关于这个伟人的故事也一直受到喜爱。在前面的数学圈旅行中，我们已经讲过一些他的故事，这里再多讲几个。

110° 家乡的光荣

爱因斯坦1879年生于德国乌尔姆。虽然在他大约一岁时，全家就从乌尔姆搬到了慕尼黑，但我们还是稀罕，诞生了这样出名的数学物理学家的城市会不会以什么方式来纪念它的伟大的市民？举例来说，人们或许希望爱因斯坦出生的那间房子能作为历史圣迹保存下来，但那房子在第二次世界大战中被炸得粉碎，已不复存在了。不过，乌尔姆有一条街被命名为爱因斯坦街。但纳粹无法忍受以这样的方式尊崇一个犹太人，所以乌尔姆纳粹市长新上任的第一天便把这条街改名为费希特街，以18世纪德国哲学家、雄辩家和爱国者费希特（Johann Gottlieb Fichte，1762～1814）来命名。纳粹失败后，街名恢复为爱因斯坦街，至今还在。

111° 无法拒绝

有个爱因斯坦的故事说，一天，一辆大卡车出现在他在普林斯顿的朴素的两层格局的住宅前。车上装着一台大电梯。事情大概是这样的：爱因斯坦本来绝对不需要也不想要这样的奢侈品，可他无法粗鲁地拒绝推销员，所以在几个星期前被唆使订购了这台电梯。最终，爱因斯坦夫人拒绝接受电梯，还赶走了载满货物

的卡车。(Robert T. Hall)

112° 巨大的激励

爱因斯坦12岁时，得到了一本小小的欧几里得几何课本，激动不已。他完全着迷了，后来在《自述》中曾愉快地谈起那本“神圣的几何小书”。他说：“有些命题，例如三角形的三条高线交于一点，尽管一点也不明显，却可以确定地证明从而不再有任何怀疑。这样的清晰和确定给了我无法言喻的影响。”从这里我们又看到了一个例子：一个杰出数学家的第一次数学刺激来自欧几里得几何的迷人魅力。

113° 神秘

在纽约的某个晚上，爱因斯坦参加了一个为他举行的宴会，而爱因斯坦夫人由于感染风寒，没有陪他参加。

这是一个正式的场合，男人们都系着白领结，女人们都穿着露肩的晚礼服。

爱因斯坦回家时，发现妻子在等他，想知道宴会上发生了什么。他开始向妻子讲那些出席宴会的著名科学家，可妻子打断了他。

“别管那些，”她说：“女士们是怎样穿着的?”

“我真不知道，”爱因斯坦答道，“桌面以上她们什么也没穿，而桌面以下我又没敢看!”(Edgar《故事集》(*Famous Fables*))

114° 第四次世界大战的武器

曾经有人问爱因斯坦第三次世界大战将会用什么武器。

他回答说：“我不知道，但我知道第四次世界大战会用什么

武器。”

“那是些什么样的武器呢?” 那人又问。

“棍子和石头,” 他答道。

115° 考虑周到的人

惠勒（John Wheeler）博士是美国首屈一指的理论物理学家，住在华盛顿州的西雅图。19 世纪 50 年代初，他在普林斯顿教学，当时爱因斯坦也在那儿。他回忆说：“从学校回家的途中，爱因斯坦博士常常会经过我家，而我孩子的小猫常常会跟着他回家。一旦他到家了，便会打电话告诉我，我家的小猫到了他家里。他不希望我们为此担心。”

116° 迟钝的人

3 岁之前爱因斯坦都不能（或是不愿意）说话。小学时，他做加法都不熟练，甚至靠拍打指关节来学乘法表。作为学生，他实在是太普通了，7 岁时他的老师形容他“没有任何突出的地方”。他想进苏黎世理工学院（现在的联邦工业大学），却没有通过入学考试，只好准备重考。毕业后，他设法在伯尔尼专利局找到了一个很普通的职位；他本想找一个相当于高中老师的职位，却始终遭到拒绝。

爱因斯坦终生都不擅长简单运算。人们相信，他发育迟缓的语言交流能力导致他形成了非凡的无需语言的概念化能力。所以在他成年以后，他一直喜欢运用抽象的概念而不用文字。哈佛的物理系教授霍尔顿（Gerald Holton）博士认为，爱因斯坦从小就习惯用抽象概念而不是文字来思考，这在他的科学工作中发挥着关键的作用。一次，爱因斯坦和朋友讨论他的思想来源说，“这

些观念从不来自任何语言形式，我几乎不用文字思考。思想先来了，我后来才试图将它用文字表达出来。”在别的场合他又写道，“那些书写或口头表达的文字和语言，在我的思考方式中没有任何地位。”爱因斯坦思想的元素好像是一组组的图像，他能自主地重现或组合它们，有的时候，他也用一些强烈的思想暗示代替视觉的符号。

117° 两件纪念品

爱因斯坦在晚年时，声称有两件东西在他一生中给了他极大的鼓舞。其中一件是一本几何学小书，在前面的故事（A112）中我们已经讲过；另一件是罗盘，是父亲在他四五岁时送给他的。他少年时曾对那本小书着迷，因为书中展示了优美的演绎推理；而更小的时候，他对罗盘着迷，因为无处不在的磁场显然控制着罗盘的指针。爱因斯坦对这两件东西留有如此深刻的印象，终生都将它们带在身边。

那么这两件对爱因斯坦影响深远的纪念品现在怎样了呢？小书还在——放在普林斯顿的档案柜中，而罗盘却不知下落了。

118° 婉拒总统职位

爱因斯坦长期致力于犹太人国家的建立。1948 年5 月15 日，独立的以色列国在巴勒斯坦成立，实现了他的梦想。1952 年，以色列政府请求爱因斯坦继承魏茨曼（Chaim Weizmann），出任国家总统。爱因斯坦遗憾地拒绝了这一荣誉，坚持他并不适合这样的位置。

119° 圣人爱因斯坦

在晚年，爱因斯坦成了大众关注的焦点，有几分像哲学圣人。许多人写信给他，请他对他们的个人问题提出忠告。其中最动人的是他在1950年收到的一个牧师的来信。牧师写道，他无法安慰他19岁的女儿。她沉浸在16岁妹妹逝去的悲痛中，找不到“建立在传统宗教基础上”的慰藉。所以忧心的父亲认为一个科学家或许能有帮助。

“一个人，”爱因斯坦在回信中写道，“是我们称为整个‘宇宙’的一部分，一个时间和空间有限的部分。他经历他自己，经历他的思想和感觉，就像经历与宇宙其他部分相隔绝的事物一样——这是人类意识中的一种视觉妄念。这种妄念像牢笼一样桎梏着我们，将我们限于个人的欲望，限于对亲近人的爱。我们必须扩展爱的范围，去领会所有人和大自然的美好，把自己从这个牢笼中解放出来。当然没有人能完全到达这一境界，但为这一目标而奋斗本身就是解放自己的一部分，也是内心平静的基础。”

120° 删掉的段落

爱因斯坦是热情的人道主义者和国际主义者，他认为民族主义和爱国主义是罪恶侵略的根源。

1915年10月23日，正值一战最紧张时期，爱因斯坦当时居住在柏林。柏林歌德协会邀请他写一篇文章在协会的刊物上发表。但接下来的通信，使爱因斯坦看清了德国的民族主义，最终被迫删除了他文章的一段话。在回应邀请时，爱因斯坦写道：“如果你不采用我的评论，我当然不会感到任何的惊讶或愤怒，但请把原文寄回给我。”

歌德协会确实为爱因斯坦的文章感到头疼，因为爱因斯坦在一段文字里将爱国主义同最恶劣的好斗动物本能等同起来。由于爱国主义思想是在前线陷于困境的德军鼓舞士气的主要精神支柱，协会要求他删除那一部分。下面就是爱因斯坦最终同意删除的那段话：

“人们或许会自问，为什么在和平时期，当社会体制平息了几乎所有刚猛好斗的表现时，那些在战争中导致大量伤亡的特征和动力并没有消失。以下便是我关于这个问题的看法：

“当我参观一个普通好公民的家时，我看到一间灯光柔和的房间。在它的角落放着一个精心保存的神龛，那是房子的主人引以为荣的东西，也吸引着每个来访者的注意力。在它上面刻着大写的‘爱国主义’。

“然而，神龛通常是不允许打开的。是的，即使房子的主人也几乎或完全不知道，神龛守护的是动物的仇恨和残杀的精神寄托，一旦战争爆发，他就会顺从地为它服务。

“亲爱的读者，你在我的家里找不到那样的神龛；而我也为你感到高兴——假如你能想到，在你的房间的那个角落里，一台钢琴或一个小书架都比那样的东西更合适，尽管那东西你从小就已经习惯了。”

爱因斯坦接着写道，“我无法掩饰我的国际倾向，”他最后指出，他碰巧所属的那个国家，“在我的精神生活里没有丝毫的作用；我认为效忠政府就像做生意，有着某种和人寿保险公司的关系。”

令人难过的段落就这样结束了，爱因斯坦最后同意把它从文中删除。然而，他在文章最后说，“可为什么说那么多呢？关于那一切我本可以用一句话来说，一句适合我的犹太人身份的话：

耶稣基督，我的主啊，向你致意，不仅以文字和圣歌，还有最重要的你的业绩。”

121° 与爱国主义的第一次冲突

爱因斯坦曾说，他绝对不会忘记他的小学同学因为区域爱国主义的误导，而对附近学校的学生的公然仇视。于是，发生了数不清的无理的械斗，在这些疯狂的战斗中，许多脑袋被打扁，而流血的“英雄”却被奉为偶像。

122° 歌剧主角的爱因斯坦

东德著名作曲家德绍（Paul Dessau）20 年来一直有一个心愿，要写一部塑造爱因斯坦的歌剧。歌剧不是传记，也不是相对论的音乐表现，而是关于一个科学家责任的道德戏——他眼看着他的发现在破坏我们的世界。最后，1974 年，80 岁的德绍看着歌剧完成并演出了。在旧金山歌剧演出公司苏伊特纳（Otmar Suitner）的指挥下，凭着一流的导演和歌手，歌剧《爱因斯坦》在东柏林国家歌剧院（Staatsoper）的世界首演赢得了巨大成功。

歌剧的演出不同寻常，每一幕过后，*Hanswurst*（德文的小丑）表演了迷人的音乐和寓言式的喜剧小品。舞台背景靠着简单的道具和场景单元，灵活地变换着 19 个场景，唤起不同的情绪。

歌剧从警报式的序幕开始，告诉观众纳粹（他们双手血淋淋地出现在舞台）正在剧场外的广场上（事件确实发生在这个地方——“演出间歇时你可以去参观”）焚烧他们不愿看到的书。第一场表现的是一次著名的事件，爱因斯坦的公寓被疯狂的士兵们毁坏了，那位数学物理学家带着他的小提琴离家去了美

国。爱因斯坦的一个同事跟着他，然后以美国官员的身份回到德国，招募第二个数学物理学家（一个纳粹的合作者和组织管理专家），准备发展原子弹。第二幕以原子弹在广岛爆炸而结束。第三幕，爱因斯坦和他的伙伴们因为反对使用原子弹，在荷枪实弹的美国军警的监视下，在美国最高法院接受审判。结果，爱因斯坦被判以“永久名声”。爱因斯坦以前的同事去参加了共产党，而他也成了痛苦的老人，赶在别人滥用之前烧毁了他的最新理论。歌剧的道德含义是通过小丑在每一幕后的寓言式表演来表现的。

莫 德 尔



莫德尔(1888～1972)

对年轻数学家们而言，最快乐的事情莫过于，那个领域里的著名人物在经过多年的生活和研究之后，当着他们的面讲述他自己和他工作的故事。莫德尔（Louis Joel Mordell），著名的数论家和丢番图分析专家，曾在很多的场合回忆往事。下面的故事（以及收在本书的署名为他的其他故事），都承蒙他同意，精选自他的文章《一个80岁数学家的回忆》（发表于1971年11月《美国数学月刊》）。尽管莫德尔的大多数职业时间都在英国，他却出生在美国——1888年生于费城——而且在那儿度过了他生命的前18年。

123° 两份自白

伟大的数论家莫德尔谈及他在拉丁学校的日子时说，“我认为我精于算术，但当然不是在后来的生活中。”

莫德尔还回忆起1904年他16岁时的一场考试，他说，“对

那场考试，我只记得有一道题是关于方程的斯图尔姆（Sturm）定理，我那时没有做出来，现在也做不出来。”[3]

3 那是关于代数方程实数根个数的定理，很有用但并不难。

124° 专业兴趣的开端

大约14岁进入高中之前，我在费城有名的里尔（Leary）书店的5美分和10美分特价书柜台偶然看到了一些旧的代数书。不知什么原因，这个学科吸引了我。其中一本书是哈克雷（C. W. Hackley）的《论代数》，作者在1843年～1861年间是当时纽约市哥伦比亚学院的教授。我看到的是1849年第三版（第一版出版于1846年）。那真是一本好书，虽然不太严密，但包含了大量的材料，包括方程理论、级数和一章数论。同那个时代的老代数书一样，这本书有一章讲丢番图分析，这是我最感兴趣的主题。我后来的许多最好的研究都是关于这个主题的，不能说和它没有关系。事实上，我最近写了一本关于这个题目的书，出版于1969年。[4]

4 *Diuphantine Equations*. New York: Academic Press, 1969.（原注）

125° 历史重演

1912年在剑桥召开了一个国际会议，我参加了。在此，我完全清楚我将要讲述的故事的寓意。当我走进大数学家聚集一堂的餐厅时，心里不禁嘀咕着：“他们是多么奇怪的一伙人啊。”我毫不怀疑历史在重演。

126° 在火车上

第二次世界大战期间，我们在青莱（Chinley）有一间乡村别墅，离我任职的曼彻斯特大约20英里。一个周末，我和妻子坐火车回家。我们走进车厢，妻子坐在我斜对面，我前面是一个

年轻人，旁边是一个中年男人。这时，我注意到年轻人在读一本《自学三角》。哦，我想我们是一个专业的，所以我问他那学科是否有趣。他没有回答，一直沉默不语。显然，如果那是重要的军事秘密，希特勒也别想从他那儿获取情报。五分钟后，我再一次问他那学科是不是很难，同样没有回答，我只好不再问了。火车到站时，我下了车，而妻子继续坐到城里。她回来告诉我后来发生的事情。那个中年人转身问年轻人，"你太没有礼貌了。为什么不回答那个绅士呢?"年轻人回答："他认为他知道数学什么呢?"

127° 挡不住的推销

1953 年，我在多伦多大学作访问教授时，和妻子去商店购买一双袜子。可在我离开商店时，妻子和售货员劝我买下一件大衣。我把这事儿告诉了一个医生朋友，他说他认识一个更了不起的售货员。一个刚死了丈夫的女人想买一套新衣给他做寿衣，而售货员劝她买下了一套衣服外加两条裤子。

128° 绝妙的回答

1958 年，我在博尔德（Boulder）科罗拉多大学作访问教授。一天电话响了，一个女人说："我是李安娜，现在我给你一个赢得 45 美元的机会。""哦，"我说。然后她开始提问："世上最古老的舞蹈是什么?"我说："这个问题太难了，我没法回答。"她又问："探戈起源于哪里?"我答："南美。"她说："太好了，你答对了这个问题，现在可以免费参加 45 美元的舞蹈训练课了。"对这样的事该如何回答，你或许会想一会儿，但我反应极快，问她："美国第一任总统是谁?"她答："乔治·华盛顿"我说："太好了，你又赢回了你的 45 美元。"

129° 回忆同学

我在这儿［费城莫德（Modell）初级中学］有个同班同学叫戴茨（F. C. Dietz），是乌尔班纳（Urbana）伊利诺伊大学的退休历史教授。去年12月我在那儿讲课时见过他。我把这事告诉了贝特曼（P. Bateman）教授（我们数学系的头儿），而他却说，他的一个同班同学因为杀人被电刑处死了。

130° 穆瑟给莫德尔的祝酒辞

为莫德尔干杯！
年轻的心，思想如飞。
从不知疲惫，
因为数论是他爱人，
他的结果美妙绝伦。

我们身边的故事

以下的轶事是关于当代数学家的。因为他们中的大多数仍然健在，插入这些故事难免有些许惶恐，我们当然不愿伤害任何一个当代同行兄弟的感情。说真的，那些关于在世和刚故去的人的故事，即使有一点取笑的意味，也应理解为对他们的喜爱。下列故事的大部分是由穆瑟（Leo Moser）在几年前开始收集的，他将这些故事转给了班柯夫（Leon Bankoff）。在穆瑟令人伤心地突然去世之后，班柯夫又将它们传给了目前的作者。为了让更多的读者能看到，作者现在就将它们连同其他几个故事一起呈现在这里。关于当代数学家的故事很容易单独扩充为一本书。

131° 谦虚的人

1923年，我参加了由美国数学会在纽约的瓦萨（Vassar）学院召开的会议。一个来自安阿伯（Ann Arbor）密歇根大学的名叫雷尼奇的教授[5]，在会上作了关于二次域类的报告，是我当时十分感兴趣的问题。我注意到他没有提苏联敖德萨（Odessa）的拉宾诺维茨（Rabinowitz）发表在 *Crelle* 杂志[6]的一篇极好的论文，于是对此提出意见。他红着脸结结巴巴地说："我就是拉宾诺维茨。"原来，他移居美国后改了名字。（莫德尔）

5 G. Y. Rainich，密歇根大学的退休教授。（原注）

6 即 *Journal fur die reine und angewandte*（《纯数学和应用数学杂志》），参见《走进数学圈》297。

132° 脱离世界

一天，哈尔莫斯（Halmos）教授演讲时，在黑板上写错了。他擦掉它说，"抱歉，我一直在希尔伯特空间。"（杰德斯）

133° 请帮助我们

据说，穆瑟一直在写一本书，已经过了很长时间，出版商十分着急，就去看他。他说他对延期感到抱歉，但他又说这本书恐怕要在他死后才能出版。好啊，那就快点儿吧。（莫德尔）

134° 连分数

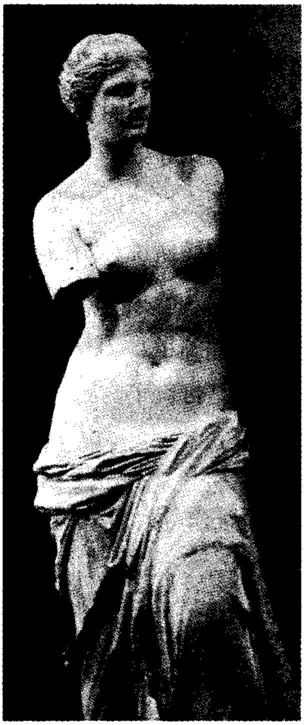
昨天，哈瑟谈及连分数。不过他当然没讲完。（道奇）

135° 克里斯蒂

鲍杜因（Bowdoin）学院的丹·克里斯蒂（Dan Edwin Christie）教授于1975年7月18日突然去世了，四天后，在学院礼拜

堂为他举行了追思会，他的几个亲密同事发表了简短讲话。

沃德（James E. Ward III）教授在讲话中回忆了一件小事。1974年夏天，沃德用丹的新书手稿讲课，给他写了个便条，指出其中的一个小错。便条最后写道，“它很美，但不正确。”几个小时后，沃德收到了丹的回音，承认错了，并改进了沃德提出的修改建议，最后说，“如果不正确，那它也不会美。”



米洛的维纳斯

基提姆（Richard L. Chittim）教授发表了最后的讲话，借柯因（Fritz Koelln）教授说的一个故事，证明了丹的一句“名言”。有一次，柯因和克里斯蒂谈老家的事情，特别是丹的出生地缅因州的米洛。柯因笑着问丹是不是知道米洛的维纳斯。丹毫不犹豫地回答，“我和她一块儿上学呢。”

136° 车轮下

在1931年苏黎世物理学会议上，卡皮查（P. L. Kapitza）躺在地上，贴近车轮，请人给他拍照。他解释说，“我只是想知道我被车碾过时会是什么样子。”（穆瑟）

137° 自豪

还是大学生的时候，奥地利人霍特曼斯（Houtermans）和英

国人亚特金森（Atkinson）在哥廷根附近徒步旅行当中，就开始解决太阳热核反应的理论，那个理论后来赢得了巨大的声誉。理论第一次猜想太阳能不是因为爆炸而是由于轻原子的聚变。理论的发展直接导致了氢弹的诞生。那时（1927 年），这两个学原子的年轻学生当然做梦也想不到会带来如此邪恶的结果。

霍特曼斯说，“在我们完成论文的那个晚上，我出去和一个漂亮女孩儿散步。天逐渐变黑，星星一个接一个地露出来，闪耀着光芒。‘星星闪烁真美啊，你觉得呢？’我的同伴大声问我。而我只是挺直了胸膛，自豪地说，‘从昨天开始我就知道它们为什么发光了。’”（穆瑟）

138° 厄多斯的新衣

一天，厄多斯（Paul Erdös）穿着新衣服去锡拉丘兹（Syracuse）大学，同事都觉得惊讶。当厄多斯脱下外套时，他们更惊讶了，发现他的内衣挖了一个矩形洞。“那是什么意思？”他们问。厄多斯解释说，“内衣上缝着一张票。票上只有衣服的尺寸和价格，我用不着它们，所以就把它剪下来了。”（穆瑟）

139° 纯真



《大鼻子情圣》电影海报(1990)

和朋友一起看过电影《大鼻子情圣》（*Cyrano de Bergerac*）后，查森豪斯（Hans Zassenhaus）评论说，“真是一部精彩的电影。制片人幸运地找到了那么好的演员，而且有那么长的鼻子。”（穆瑟）

140° 好理由

有一天很冷，而且风雨大作，兰贝克（J. Lambek）坐出租

车去麦克吉尔（McGill）大学，看见查森豪斯在街头的角落里等公共汽车，就让出租车停下来，要他搭车走。“不了，谢谢，”查森豪斯说，“如果我不能坐公共汽车按时上班，也不想坐出租车按时到那儿。”

141° 合理的借口

希尔德（A. Schild）是多伦多大学研究生，在做宇宙学的课题，同时也去（至少别人以为他会去）听一些其他课程，包括拓扑学。听拓扑学时，他落下了很多课，最后，当他出现在课堂时，老师问他为什么那么久不来上课。他回答，“我正忙着计算宇宙的大小呢。”（穆瑟）

142° 解释

华罗庚回中国后，有些美国报纸报道他自杀了（假的）。他的学生尤伯（R. Ayoub）这样解释那些报道：“我给他寄了我的博士论文，猜想他可能根本收不到。”（穆瑟）

143° 进步

1951 年，有人问泰勒（E. Teller）：“热核机器能工作吗？”

“我不知道，”他回答。

“5 年前你也不知道，那么你岂不是一点儿进步也没有？”

“不，有进步。”泰勒回答，“现在我更有理由不知道了。”（穆瑟）



“氢弹之父”泰勒（1908～2003）

144° 新的老结果

辛格（J. L. Synge）告诉温斯坦（A. Weinstein）他才获得的一些新结果。温斯坦告诉他，那些结果并不新鲜，其实在最近的一家意大利杂志上已经出现过了。辛格说，“那不可能，我订阅了那家杂志的，没见过那样的文章。”温斯坦坚持他的意见，于是二人来到辛格的办公室，拿出那个杂志。温斯坦把几页拼在一起，然后单独拿出来，就是他说的那篇文章了。（穆瑟）

145° 诗与物理学

一天晚上，一向沉默寡言的狄拉克（Paul Dirac）把奥本海默（Oppenheimer）拉到一边，轻轻走近他问，“听说你做物理的时候还写诗。你怎么能同时做这样的两件事情呢？在科学中，我们力图以大家都能理解的方式告诉他们以前不知道的事情，而写诗则恰恰相反！”（穆瑟）

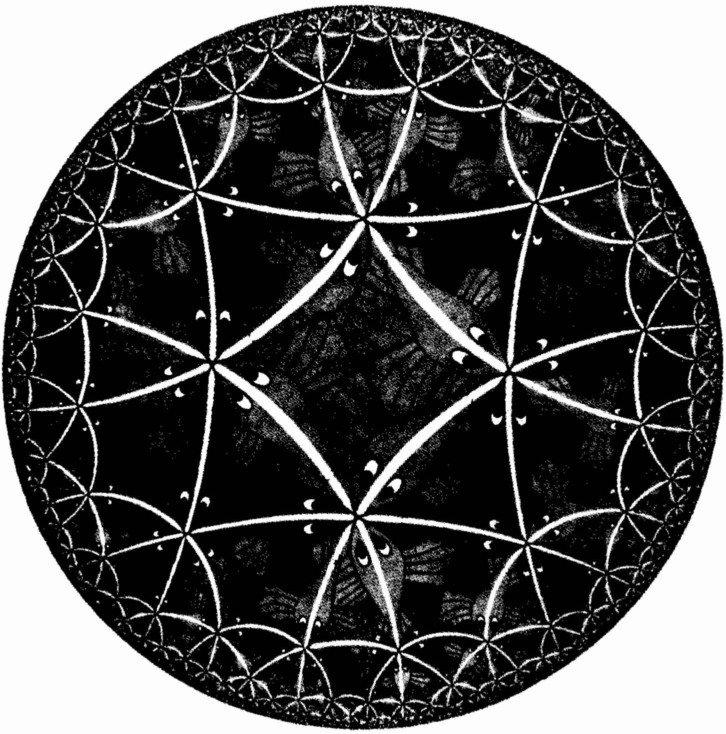
146° 令人惊讶

随机选择两个整数，则它们互质的概率为 $6/\pi^2$。在 1953 年 7 月的《科学美国人》（pp. 31 ~ 35）的一篇题为“度圆法”的文章里，布里奇曼（N. T. Bridgeman）描述了这个事实的一个实验证明：

“查特里斯（Chartres）在 1904 年随机选了 250 个素数对，发现其中 154 对是互为素数的；而我们大家都知道，联合概率是 $6/\pi^2$，因此，他的实验相当于估计 π 的值为 3.12。”（穆瑟）

147° 崇高的理想

科克塞特（H. S. Coxeter）告诉费尔（Howard Fehr），他的一个儿子正打算学牧师，费尔一听，马上回答，“真是崇高的理想，不过我相信他会长大的。”（穆瑟）



埃舍尔受科克塞特启发画的一种非欧几何空间

148° 是的，但是

多伦多大学的因费尔德（Leopold Infeld）曾讲过一门科学哲学课。有一次，他讨论从不同宇宙起源学说引出的物理学新概念。一个学生问，“我们不能同样地假定上帝存在吗？”

“是的，当然可以，”因费尔德说，“但是我的孩子，你很清楚地知道那么做是没有道理的。”（穆瑟）

关于数学和数学家

149° 关于数学家

好的基督徒应该警惕数学家和所有制造空洞预言的那些人。危险已经存在，数学家已经与魔鬼结盟，要一起来败坏灵魂，把人们禁闭在地狱。[7]（奥古斯丁）

7 关于这段文字的真假，参见《回归数学圈》（R349）。

150° 幸运的要素

有句老话说，燕麦、豌豆和大麦都要发芽，但你我他都不知道它们靠什么发芽。同样，不论你我他，也都不知道数学家是怎么工作的。那不是聪明不聪明的问题。我认识许多数学家，都远比我聪明能干，但没我这么幸运。为了说明这一点，我们考虑两个矿工：一个也许是地质学家，但他没有找到金子，而另一个无知的矿工却找到了。（莫德尔）

151° 存在性证明

上帝存在，因为数学是和谐的；魔鬼存在，因为我们不能证明它。（韦伊）

152° 数学游戏

上帝是一个孩子，当他开始玩儿的时候，他培养了数学。数学是人类游戏中最神圣的。（V. Erath，《盲人故事》（*Das blinde*

Spiel)，1954)

153° 类比

只会做练习而不能解决任何数学问题的学生，大概就像学会走棋却从不下棋的人。真正的数学就在于参与它的游戏。（特纳）

154° 长寿

阿基米德会被人们记得，而埃斯库罗斯（Aeschylus）却会被遗忘，因为语言会死，而数学思想永存。（哈代《一个数学家的自白》）

155° 内心的自我

从某些意义说，数学家不能为他的行为负责。有时候，我们会觉得有一个内心的自我偶尔会跟外在的自我交流。庞加莱和阿达玛谈他们的研究时，也支持这样的观点。[8] 我记得有一次，写完一篇论文大约三个星期以后，我在安德鲁斯大街漫步。尽管写完那篇论文后，我没再考虑过它，但我突然想起里面的一个证明还需要检查。我非常感谢那个内心的自我，能在我解决某些重要难题时为我提供无价的帮助，否则我根本解决不了。（莫德尔）

156° 妙语

《数学学报》（*Mathematical Gazette*，英国初等数学师生协会的官方刊物）从1901年第26期起，都在封面刊载罗杰·培根（Roger Bacon）的一段格言：[9]

8 参见《相约数学圈》S348～351，353和358。（原注）

9 这话应该是大哲学家培根（Francis Bacon）说的，是他《法律格言》（*Maxims of the Law*）前言的第一句。

我想每个人都是他的职业的债务人，当然，人要靠它寻求支持和好处，所以也就有责任尽自己的力量来补偿它，为它增光。

157° 数学与安泰

力大无比的安泰是海神尼普顿（Neptune）与大地女神盖伊(Ge)的儿子,只要他不离开大地母亲,就天下无敌。到他的国度来的陌生人都被迫与他角斗,于是出现大力神赫拉克勒斯(Hercu-les)和安泰大战的一幕。不过，赫拉克勒斯知道安泰的力量源泉，所以将他举起来，离开大地，然后在空中把他撕得粉碎。

这对数学家当然也有启示。正如安泰在大地出生，由大地抚养长大，历史证明，重要而持久的数学也是从现实世界发源，在现实世界成长。和安泰的情形一样，只要数学保持与现实世界的联系，它就具有无限的威力。但是，如果它被举得太高，远离了它发源的坚固的大地，漂浮在纯粹的抽象的空气中，那么它就有失去力量的危险。它必须（至少偶尔）回到现实世界来汲取新的力量。



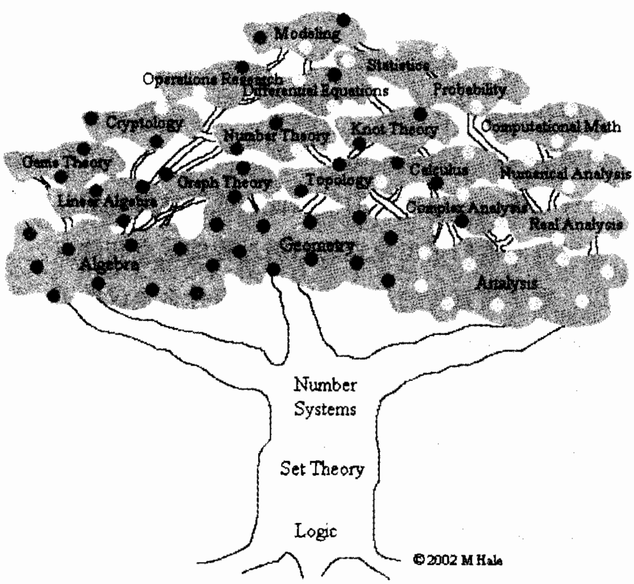
赫拉克勒斯和安泰角斗

158° 数学树

［改编自作者《数学史引论》15～10 节，纽约：Holt，Rinehart and Winston，1976，第四版。］

若干年前就流行把数学画成一棵大树（通常是一棵巨大的橡树）。树根张开着，是代数、平面几何、三角、解析几何和无理数。从这些根生出伟岸的树干，就是微积分。接着，从树干的顶端分出无数的枝干，它们又分出更多更细的枝桠。这些分支是复数、实数、变分法、概率论，等等，连着高等数学的所有“分支”。

画数学树的目的是，不仅向学生说明数学如何从历史成长起来，也为他们指明追寻和研究这门学科的路径。于是，在中学甚至大学一年级，同学们应该学会形成树根的那些基础学科。接着，在他的大学时代，他应该通过专门的课程，完整地掌握微积



20 世纪的数学树

分。学完它之后，同学们才能上升到他希望追求的别的分支。

数学树所宣传的教学原则也许是合理的，因为它基于一个著名的定律，用生物学家的话说，它可以简洁地表述为："个体发育重演系统发展。"它的意思是，一般说来，"个体重复集体的发展。"就是说（至少大致说来），学生主要根据一个学科的历史发展顺序来学习。我们可以拿几何作为一个特殊的例子。最早的几何也许可以叫做潜意识的几何，它源于人类凭着认识物体形状、比较物体大小的能力而进行的简单观察。然后，它成为科学的或实验的几何，学科演化到这个阶段，是因为人们的理性能从一组具体的几何关系抽象出一般抽象关系（几何定律），而将原来的关系作为特例包含其中。整个前希腊化时代的几何都属于这样的实验几何。后来，其实是在希腊时期，几何演进到了更高的阶段，成为证明的几何。于是，我们在这儿说的基本教学原则意味着，应该首先向孩子们呈现潜意识形式的几何，例如让他们做些简单的手工，多观察些自然现象。过些时候，潜意识的基础演变为科学的几何，孩子们能用圆规和直尺、三角板和量角器、剪刀和浆糊做实验，然后归纳出一系列几何事实。再过些时候，学生已经足够老练，可以向他们呈现证明或演绎形式的几何了，这时候，也可以向他们指出原先的归纳过程的优点和缺点。

所以，数学树宣传的教学原则是没有什么争议的了，那么数学树本身呢？它还能是当今数学的合理而真实的图像吗？我们认为不是。数学树显然是时间的函数，上面说的那棵橡树当然不可能是伟大的亚历山大时代的数学树。那棵橡树很好代表了 18 世纪的数学状况，也代表了 19 世纪的部分数学，因为在那些年代，数学的主要工作是发展、扩张和运用微积分。但是，随着数学在 20 世纪的巨大进步，那棵树所代表的一般数学图景已经不复存

在。也许应该说，今天的大部分数学已经与微积分及其扩张没有多少关系了。例如，我们可以看看这样一些领域：抽象代数、有限数学、集合论、组合学、数理逻辑、公理系统、非解析数论、几何的公理化研究、有限几何，等等。

为代表今天的数学，我们必须重画数学树。幸运的是，真有那么一棵理想的树——榕树。榕树有多个主干，而且不断生长出新的树干。从榕树的分支会向下生出新枝，直到深入地下。新枝在地下生根，在未来的年月里越来越粗壮，然后成为主干，长出自己的分支，不断向着地下生长。

世界上有些榕树拥有众多的枝干，能覆盖几个街区的面积。这些树和橡树一样，既优美又长寿。据说，释迦牟尼曾在其下端坐冥想的那棵印度榕树至今还茂盛地生长着。于是，榕树更恰当而准确地代表了我们今天的数学。在未来的年代，新枝还会发芽，而某些老树也许会萎缩甚至消失。不同的学生可以选择不同的树干,先学根所覆盖的基础,然后向上攀爬。当然,所有的枝干都通过交错的枝桠在头上紧密相连。微积分的枝干还活着,而且发育很好,但还有许多别的枝干,如线性代数、数理逻辑等等。

今天的数学已经无限宽广，极富创造力的数学家也可能对微积分及其扩张知之甚少。我们这些今天在大学教数学的老师，要求所有学生都必须先爬数学树的微积分枝干，这对某些学数学的同学来说也许是一种伤害。尽管微积分美妙动人，但并不是每个学数学的人都能从它那儿采撷自己喜欢的那一片叶子。我们强迫所有同学爬上微积分的枝头，也许扼杀了一些潜在的其他非微积分领域的数学家。总之，现在是时候了，我们应该调整数学教学，让它适应更能代表学科的历史演化的新数学树。



西双版纳独树成林的大榕树

159° 另一个类比

象棋总能吸引数学家，我们有理由假定下棋的本领在很多方面都很像数学能力。学下棋要认识不同的棋子儿，如卒、马、象、车、后、王；棋盘有不同的正方形组合，如行、列、对角线等；棋子的移动遵循一定的法则，而棋手还有自己的法则……只要增加棋子的数目、扩大棋盘的面积、制定新的游戏规则，我们就能形成对数学内容和特征的良好认识。(J. B. Shaw)

160° 升官

有时候，教授被任命为系主任，从此就不再做什么有学术成果的事情了。这样的事情经常发生在许多数学教授身上，于是我们想起下面的也许是杜撰的故事。

某数学教授得了脑瘤，赶紧去做手术。外科医生打开他的头颅，取出大脑放在手术台上。

这时候，教授的一个同事来了，宣布教授刚被任命为系主任。教授一听，欢呼着从手术台上弹了起来，拍拍自己的头颅，从最近的出口飞也似的跑了出去。“等等，”医生大喊，“你忘了把大脑放回去了。”

“我现在不需要它了，”教授的回声远远传回来，“我是系主任了！”

161° 最小上界

不列颠哥伦比亚大学的詹宁斯（S. Jennings）对学校的行政事务越来越积极，一个同事形容他是“非主任的最小上界”。（穆瑟）

162° 伟大的错误

1688年，剑桥大学选牛顿做他们在国会的代表。事实证明这算不得一个好决定。在牛顿的整个任期内，大家只听他说过一句话，请人把窗户打开。

教授，老师和学生

163° 库里奇

库里奇（Julian Lowell Coolidge，1873～1954）是20世纪上半叶哈佛的伟大几何学家，上课机智而幽默。据说，他曾经说过，“我讲课的时候，想方设法让学生笑。当他们开口时，我就给他们塞进一些东西，让他们咀嚼。”

164° 特殊课程

系主任要教授专门为学校的一群生病的学生准备补课。教授给那门课起的名字是“学问病人的数学”。

165° 懒学生

塞尔弗（Bennett Cerf）[10]说，著名的麻省迪尔菲尔德学院院长博伊登（Frank Boyden）为懒学生留着下面的一首小诗：

> 愿望不会带你走得更远，
> 坐下观望也是徒然。
> 仁慈的上帝请你垂钓——
> 鱼饵还要自己寻找。

这令我们想起《重游数学圈》（R190）的那首打油诗。

10 塞尔弗是著名的“兰登书屋”的创始人之一。

166° 棘手的境地

数学教授忘了他下午约好了在学校办公室见一个学生。那同学战战兢兢在教授办公室等了半个多小时，然后鼓起勇气来到教授的家门口。他摁响门铃，教授的小儿子开了门。

“我到哪儿能见到（get hold of）你父亲？”同学紧张地问。

“我不知道，”小孩儿回答，“他浑身都不好对付。”[11]

11 小孩儿把学生的话理解为“我能抓住你父亲的什么地方？”

167° 火星

数学天文教授想证明几颗行星的相对位置的某个结果，对同学们说，“我把帽子放在这儿代表火星，有问题吗？”

“当然，”一个同学回答，“火星上面有人吗？”

168° 数学考试

数学教授叹气说，“傻子能在几分钟里提好多聪明人几个小时也回答不完的问题。”这时，他听到一个学生在小声嘟哝，“难怪我们那么多人都没通过你上回的考试。”

169° 多用

数学系休息室外走廊的墙上有一行吊钩，旁边有块牌子写着“教工专用”。某个机灵的学生在下面用铅笔加了一行字：“帽子和外套也可以用。”

170° 那怎么了？

学校要找一个代数和几何的老师，收到这样的一封回信：

“先生，我注意到你们的广告说要一个代数和几何的老师，男女不限。我两样都做了好几年，愿意为你们效劳。”（穆瑟）

171° 老师

国王决定褒奖一个为知识进步做出重大贡献的臣民。于是，很快推举出不同学术领域的顶尖研究者。仔细审查过候选者的材料之后，国王发现一个穿着破旧衣服的老妇人弯着腰站在不起眼儿的角落里。

“那女人是谁？”国王问。

“她只是来看的，陛下，”一个大臣回答，“您知道，她想知道结果，因为所有那些候选者年轻时都是她的学生。”

国王走下宝座，将荣誉的花冠戴到那位老师的额头。

172° 研究者与教学者

华顿（Edith Wharton，1862～1937）指出，“传播光有两种途径：要么做一根蜡烛，要么做一面反射烛光的镜子。”[12]

12 华顿是美国现代作家，她的代表作有《纯真年代》（*The Age of Innocence*）和《快乐之家》（*The House of Mirth*）等。

演　讲

数学教授的大部分时间都在讲课，要么在课堂给学生讲，要么在会上给数学家讲。围绕着讲课和演讲，有时发生一些有趣的事情。下面是穆瑟收集的八个故事。注意后三个故事有些相似，如果可以证明一个数学结果，那么检验那个结果就成为无关紧要的小事了。

173° 一个人理解

在纽约的一次数学家大会上，佩尔斯（C. S. Peirce）向众多听众做完一小时报告后说，“我突然想起，大概只有一个人有可能理解我今天演讲的精神——而那个人在南美。”

174° 狂想者

阿达玛曾计划到美国巡回演讲。他想会见美国数学家，和数学系的老师们讨论问题。他特别给锡拉丘兹大学写了信。因为数学系主任不在，信到了校长手里。校长拒绝了阿达玛的演讲请求。他认为，阿达玛没有谈报酬问题，肯定是个狂想者。

175° 理解

有一年，因费尔德（L. Infeld）和布劳尔（R. Brauer）合

作开设了一门群论与量子力学的课程。根据听课的研究生们的说法，因费尔德不理解布劳尔，布劳尔也不理解因费尔德，学生们当然是两个都不理解。

176° 打断

塞蒙德（Antoni Zygmund，1900 ~ 1992）讲课时，[13]一个女同学老是打断他说，“我不懂这一点。”

教授很恼火，最后对她说，“别担心，你还是那么年轻。”

13 塞蒙德是调和分析的大师，他的《三角级数》近年还在国内影印出版。

177° 不安的开始

滑铁卢大学弗莱尔（K. D. Fryer）教授要在皇后大学讲连续几何。演讲之前，他在黑板上写满了令人眼花缭乱的公式，公式上边还留下几个大字：“别擦掉！”听众看见那些复杂的公式很担心，怕听几句就跟不上了。没想到弗莱尔的第一句话就是，“好了，我相信这些都可以不要了。”接着就把公式都擦掉了。

178° 检验

在艾伯塔大学的一次数学座谈会上，维曼（Max Wyman）为一个定理给出了很长的复杂的证明，定理一旦证明，检验就轻而易举了。鲁尼（P. G. Rooney）问维曼如何检验，维曼回答，“我没检验过，那不必要。证明就够了！”

179° 啤酒肚

比贝尔巴赫（L. Bieberbach，1886 ~ 1982）嗜喝啤酒，结果得了啤酒肚（beer belly），同学们都叫他 Bier Bach（听起来就像 beer belly）。[14]

比贝尔巴赫面对初等算术常常犯难。他的学生知道他的这个毛病，于是，每当证明一个可以用数字说明的定理，他们都要他举一个例子。经过几次失败后，他不再举例了，大声说，“Es ist doch so wie so bewiessen.”[15]

14 德国数学家，曾解决希尔伯特第18问题。他还证明，对任意 $n>3$，存在 n 阶幻方。

15 不管怎么说，它已经被证明了。

180° 阿丁的图论

阿丁（Emil Artin，1898～1962）曾在多伦多大学发表图论的演讲。他讨论和解决的问题是由一个疑问引出的：有多少种满足一定化合价条件的化合物？演讲结束后，一个化学家问，他的结论与实际的化合物数目相差多少。阿丁回答，“我不知道，也不想知道。”

第三象限

从作者的笑话到一道难题

作者和书

数学课本的作者有时会遭遇文字陷阱从而贻笑大方。同样，非数学专业的作者有时也尝试一些数学讨论，结果令数学家笑话。下面是几个例子。[1]

181° 作者的笑话

吉尔曼（Leonard Gillman）和麦克多维尔（Robert McDowell）在他们的《微积分》（W. W. Norton，1973）里，“为完整起见”，包括了一个与最大下限有关的定理。在同书的其他地方，他们说“简单思考即可证明f^{-1}的图像是……f图像的镜像。”[2]

182° 中国剩余定理

在斯塔克（Harold M. Stark）《数论导引》第72页，有一个关于中国剩余定理的可笑脚注：“更不为大家熟知的叫法是台湾定理”。[3]

183° 莫尔－马歇罗尼作图

格林布拉特（M. H. Greenblatt）在他的《数学娱乐》中就“莫尔－马歇罗尼作图”（即只用圆规作图）发表评论说，“这些马歇罗尼作图的莫尔，在科斯托夫斯基（A. N. Kostovskii）的小册子里有很多描述。”[4]

184° 许诺

有一个故事说，机智的哈尔莫斯（Paul Halmos）在写他的

1 以前的例子见《重游数学圈》R192 和《相约数学圈》S344，345，346 和 347。

2 既然求“完整”，就不应有“下限”；“简单思考”原文用的是“a little reflection”，另一种意思就是“反射”，既然是反射，当然结果就是“镜像”。这都是数学家用词不考究的结果。

3 南北朝时期的《孙子算经》有个著名的“物不知数”问题：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何?”《孙子算经》最先详细介绍了问题的解法（所以也叫“孙子定理”）。13 世纪下半叶，秦九韶创造了更普遍的算法，即“大衍求一术”，传到外国被称为“中国剩余定理”。

4 莫尔－马歇罗尼作图的故事见《走进数学圈》343。

杰作《有限维矢量空间》时，答应朋友会在书中提到朋友的名字。在书的索引中，真的可以看到那个名字，“Hochschild, G. P.”，指示的页码是198，正是索引中出现这个名字的那页。

霍赫希尔德（Hochschild）后来成为伯克利加州大学著名数学教授。

185° 刚好

在《现代数论导引》中，有个定理是用反证法证明的，最后矛盾以 $333 \geqslant 1\,000/3$ 的形式出现。作者埃丝特曼（T. Estermann）指出，“那两个数如此接近，令我想起那个苏格兰人的故事。他怀疑地看着自己的变化，别人问是不是够了，他说，‘够了，不过刚好。’”

186° 作者之间

哈瑟（Helmut Hasse）在他的《数论教程》（*Vorlesungen uber Zahlentheorie*）后面的作者索引中列出了“Gott”，参见第一页。在第一页可以看到引用的克罗内克的名言：“Die ganzen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.”[5]

5 “上帝创造了整数，其余都是人为的。”

187° 删除的段落

在斯普林格出版的我的教科书《数论教程》中，我一开始就引用了克罗内克的名言和戴德金的相反观点。1953年，本书的俄文译本在莫斯科出版，原来的第一段文字被删除了。1963年我去莫斯科时，他们告诉我那段话没通过外文出版部门的审查，因为上帝是不存在的。（哈瑟）

188° 魏维尔的诗

魏维尔（William Whewell）博士做三一学院院长时，在第一版《力学初阶》（1819）里，无意间把有的散文写成了韵文，令同学们感觉好笑。他写道，“没有一个力，不论多么强大，能将一根绳索，不论多么纤细，拉成水平的直线，真正的平直。”原文简直是一首四行小诗：

There is no force, however great,
Can stretch a cord, however fine,
Into a horizontal line,
Which is accurately straight.

剑桥大学地质系的塞奇维克(Sedgwick)教授在一次晚宴后的讲话中背诵了这几行“诗句”,才第一次引起魏维尔的注意。魏维尔没看出这里面有什么好笑的东西,不过还是在书的下一版中把那几句诗改了。有讽刺意味的是,魏维尔生前发表过两本真正的诗集,但只有上面引用的几行是他至今还有人记得的惟一一首“诗”。

189° 批评

有人问哈佛大学的韦德（David Widder），“你对巴特曼（Bateman）的那本微分方程的书有什么看法？那是一本好书，是吗?”“那本书啊!”韦德感叹道，“随便你翻到哪一页，随便指一句黑体印刷的陈述，我都能找出一个反例。”（穆瑟）

190° 证明一个假设

在托马斯·曼（Thomas Mann）的著名短篇小说《矮个子弗

里德曼先生》中，在林林根（von Rinnlingens）的一次聚会上，大量客人退进了吸烟室。我们看到：

> 有的人在房间里站着说话，门的右边，一伙人围坐在一张小桌旁，中心人物就是那个学数学的学生，正滔滔不绝地讲话。他断言通过一给定点可以做出不止一条直线平行于已知直线；哈根斯特鲁姆（Hagenstrom）太太嚷道那是不可能的，他接着就去证明。他的证明无懈可击，听众也不禁装出恍然大悟的样子。

1875年，托马斯·曼出生在德国吕贝克，1955年死于瑞士苏黎世。《矮个子弗里德曼先生》是他文学创作的第一次成功，写于20岁出头，那时他在意大利住了两年。

191° 智力分类

我的话被打断的时候，我正想说，智力分类的众多方法之一就是把它分为算术智力和代数智力。所有经济和实用的智力不过是算术公式 $2+2=4$ 的延伸。每个哲学命题都有着 $a+b=c$ 的更一般特征。在只会用数字而没学会用文字思考之前，我们只不过是以自我为中心的靠经验生活的工匠。[6]

6 见 Oliver Wendell Holmes，《早餐桌上的霸王》（*The Autocrat of the Breakfast Table*）。

192° 关于矢量

传说，有个印第安部落相信箭是矢量。为了射杀向东北方奔跑的鹿，他们不是拿箭直接瞄准东北方向，而是同时向北方和东方射出两只箭，靠两只箭的强大合力来射杀鹿。

怀疑的科学家不相信这个传说，指出从来没有发现过那个部落的丝毫遗迹。不过，在那种环境下，人们都认为部落是因为饥

荒而彻底消失了。部落存在的说法证实了两个截然不同的理论：箭的非矢量行为和达尔文的自然选择原理，因而不能简单地抛弃它。[7]

7 见 Banesh Hoffman，《谈矢量》（*About Vectors*，Prentice-Hall，Inc.，1966）。

193° 渐近逼近

> ……他似乎在向那坟墓靠近，就像一条双曲线逼近直线——走得越近，方向偏离越远，最后他才怀疑是不是真的能达到那儿。[8]

8 见托马斯·哈代《远离尘嚣》第15章。

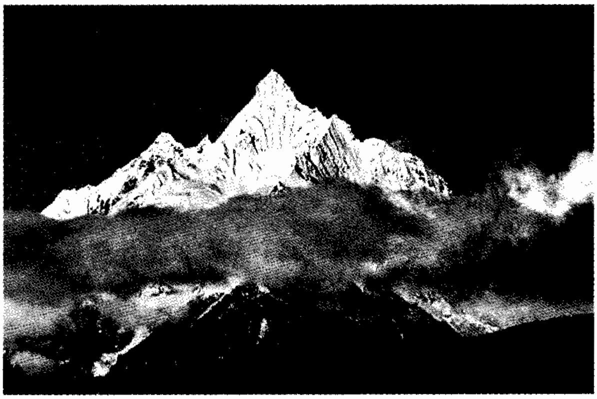
194° 文学里的数学感觉

希尔顿（James Hilton）在他那令人难忘的小说《失去的地平线》中，描述了康威（Conway）第一眼所看到的将他带进香格里拉的那片风景和远方的浮在香格里拉上空的尖尖的卡拉卡尔（Karakal）雪峰。

> 那风景并不怎么诱人，可对康威来说，他在俯瞰的时候从中生出了一种奇异微妙的感觉，没有一点儿罗曼蒂克，却带着冷峻的理性的气息。远方的金字塔似的雪峰像欧几里得几何一样无情地冷冰冰地强迫大脑向它臣服……

然后我们在故事里看到这样的氛围和香格里拉的神秘对康威的影响：

> 它的气息令人平静，它的神秘令人好奇，总的感觉是惬意的。几天来，他已经慢慢对喇嘛庙和那儿的居民有了一个奇怪的结论，他的头脑还在想着那个结论，尽管从内心深处的感觉来说他还是平静的。他像怀着难题的数学家——虽然一直想着它，但心底平和，不动一丝感情。



梅里雪山太子十三峰
之一的缅茨姆峰

故事的另一个地方，康威还记录了他对大喇嘛说教的反应：

> 好几次他都感觉自己完全为大喇嘛的超凡智慧所折服。透过那些小小的淡蓝色茶碗，那沉闷的宗教仪式也生动起来，温和而精巧，他仿佛觉得一个朦胧的定理融化成一首清澈的十四行小诗。

我们还记得福尔摩斯在华生完成他的第一本书《血字研究》后的轻蔑评论：

> 坦白说，我不能祝贺你。侦探是（或应该是）一门精确的学问，应该以同样冷静的心态来处理。你已经给它涂抹了一层罗曼蒂克的色彩，结果就像你把恋爱或私奔的故事写进欧几里得的第五命题。

定　义

在数学中，确立精确的定义是至关重要的。

195° 一个定义

让一个小女孩儿定义“零”，她回答说，“‘零’就像皮飞走了的气球。”

196° 关于定义

下一个好定义很不容易。传说，柏拉图定义人为“无羽毛的两足动物”，戴奥真尼斯（Diogenes）养了只拔了毛的鸡，说“这就是柏拉图的人。”因为这一点，定义又加了一句“具有明显的指甲”。遗憾的是，故事到这儿就完了。可是，如果戴奥真尼斯当初是戴着他拔下的鸡毛站在柏拉图面前，结果又会怎样呢?[9]

9 见 Banesh Hoffman，《谈矢量》。

197° 建议

替代常用短语“坐标变换”的小词，在几何中是唾手可得的。“code”一词如何?

198° 道奇的矩形（破碎的一角）

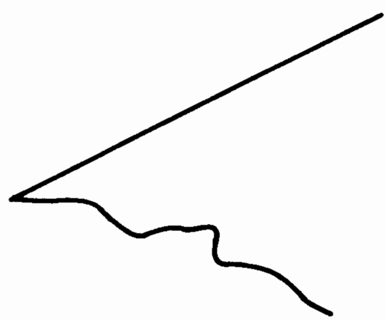


图2

199° 锐角

问题：定义锐（cute）直角三角形。

答案：直角边漂亮的三角形。[10]（道奇）[11]

200° 一个傅里叶级数

Yea + Yea + Yea + Yea.[12]（道奇）

201° 答对了

在博士论文初试中，克拉福德（W. Crawford）被要求解释"同胚"（*homeomorphism*）和"同态"（*homomorphism*）的意思。他知道"同胚"，但不大记得"同态"的定义了。不过，他自己编了一个正确的答案："同态是不大完全的同构（*isomorphism*）。"（穆瑟）

10 cute 也有"可爱"的意思。

11 道奇（Clayton Dodge）曾回忆说，"我欠伊弗斯很多，他激发并鼓励我写书，引导我解题，向我展示他对教书和数学的热爱，教导我一个老师必须小心谨慎，真诚对待学生。如果说我还算一个好老师，那主要是他的榜样的作用。"

12 "一个傅里叶级数"的英文"A Fourier series"发音同"A Four yea series"，即"四个yea的序列"，中文就更有趣了："是，是，是，是。"

逻　　辑

数学理论产生于两个因子的相互作用：一套假设和一个逻辑。假设构成理论出发的基础，而逻辑构成基础扩展为一个定理系统的法则。[根据 Howard Eves 和 C. V. Newsom《数学基础和基本概念导引》（*An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, revised edition. Holt, Rinehart and Winston, 1965.）]

202° 因和果

大家都知道，每个原因都有结果，而每个结果也都有原因。

但有时两者纠缠在一起，很难区分哪个是原因，哪个是结果。例如，假定有两个沙漠流浪者第一次来到威斯康星州，看见一艘快艇拖着一个人在湖面上滑水。“那船怎么跑那么快?”一个流浪者问。另一个回答说，“因为后面有个狂人在追它。”

203° 演绎

有些邮政官员有着惊人的耐性和创造力。据说，有个邮递员遇到一封地址如下的信：

Wood.

Mr.

Mass.

他居然很快把它送到了收信人的手里：

Mr. Underwood

Andover,

Mass.[13]

13 这是一个有趣的字谜。地址的文字分开来就是 Mr. under Wood and over Mass.（“Mr.”在“Wood”下面而在“Mass”上面。信封就是这样安排那几个字的。Mass. 是马塞诸塞州的简写，Andover 是州东北的一个小城。）

204° 理所当然

两个爱尔兰女人每天都站在窗台上隔着一条小巷争论。她们从来没有达成过一致，当然，这是预料中的事情，因为她们的地基不同。

205° 本奇利的二分律

本奇利（Robert Benchley）说，“世上大概有两类人：一贯把世人分成两类的人和不把世人分成两类的人。”

206° 依我看

一个太太在看电视新闻时，转身对丈夫说，“依我看，这个国家的大多数人都属于某个少数人的群体。”

207° 无疑

记者请副国务卿麦克洛斯基（Robert J. McCloskey）谈谈决策的艺术。副国务卿回答：“有一件事你必须记住：所有决策都是在所有决策做出之后才做出的。”

208° 逻辑

记者请芝加哥市长达利（Richard J. Daly）谈谈当前货运工人罢工的事情，市长回答，“人们分裂是因为没有能力团结在一起。”

209° 必要而充分

一个地方电台广播员在谈危险的行车条件时，忠告大家“除非绝对必要，没必要时请不要开车外出。”

210° 重复一遍

一个给保险公司的交通事故报告里有这样一句话：“我的车没受任何损害，对方的车损害更小。”

211° 分开

芬克贝纳(Finkbeiner)和我在圣安东尼奥用过早餐，准备付账。服务员说，“你们是分开给还是一块儿给？”我说，“请分开

吧。”她转身对芬克贝纳说，“你的也分开给吗?”（鲍斯）

212° 谁是谁啊?

我遇到琼斯，问“怎么样啊，琼斯?”琼斯回答，“马马虎虎，谢谢。你怎么样呢，史密斯?”我说，“我不叫史密斯!”“我也不叫琼斯，”那家伙说。然后我们又端详了对方，真的，我们都不是自己!

213° 证明

安迪（Ambling Andy）对一群人大谈他多么喜欢散步。他说，随着每天坚持散步，他发现，每到黄昏时，他离家一天比一天更远了。为了解决这个难题，他把家搬到一个锥形小山的半山腰。从此以后，他每天绕着小山一圈一圈地散步，日出时开始，日落时结束。若干年后，他痛苦地发现，因为总是围着山坡走，经过长期磨炼，他靠近坡上的脚比坡下的脚短了。朋友们很惋惜，以为安迪的散步就此结束了。可安迪只不过沿着相反的方向散步，就把长腿磨炼得和短腿一样了。有个听众似乎不相信，安迪就站到那人的面前去，指着说，“你看，我的两条腿不是一样长吗?”

214° 当然

问：“ghot”如何发音?

答：和“fish”一样。你看，“gh”和在“laugh”中一样，“o”和在“women”中一样，“t”和在“nation”中一样。

215° 三段论

一只猫比没有猫多一根尾巴。

没有猫有两根尾巴。

所以，一只猫有三根尾巴。

216° 双重否定

大人哄一个5岁小孩儿背诗，妈妈为了刺激他，说，“你根本就不会背，是吧?”小孩儿回答，“我不是不会!”

217° 自然

老祖母再也没找到她的眼镜——所以她拿罐头来喝水。[14]

14 眼镜“glasses”在英文里也有“玻璃杯”的意思。

218° 例外

例外永远不能用来证明法则，但可以检验法则。就是说，如果一个法则对例外（而不是一般）情形都很正确，那它极有可能是一个好法则。

219° 能与不能

（1）我喜欢数学，我参加数学俱乐部的会，我学习很多数学的东西。但我的数学功课还不是太好。

（1）我喜欢棒球，我看电视转播，我读了很多棒球的书，可我还是一个臭手。

（2）我学数学比乔用功多了，但他的成绩还是比我好。

（2）我练摔跤比乔努力多了，可他总能赢我。

220° 物理学定律

在新英格兰的一座小城，在一座大楼前面，在一个趾高气昂、衣冠楚楚的大师的激情指挥下，12 个乐手的乐队正在嘹亮地演奏。

一个好奇的过路游客停下来，问一个观众，"他们在赞美谁?"

"哦，市长大人，"那人回答。"他怎么不到门口或窗前来感谢大家的赞美呢?"游客接着问。

"因为市长正在指挥呢，"那个观众解释说，"你不能指望他同时出现在两个不同的地方，是吧?"

221° 语言问题

一个日本数学家写信给一个美国数学家，问他要一篇文章的抽印本。信最后说，"请务必原谅我冒昧的要求。"[15]

一个印度学生给一个加拿大大学数学系主任写信，表达了他想继续在加拿大求学的兴趣。他的经济条件显然不太好，所以说，"我想您为我所做的能在两方面帮助我。"[16]（穆瑟）

15 日本人的原文用的词是"shameless disire"，成了"无耻的愿望"。

16 印度人也是表达不当，他说"I wonder what you can do to help me make both my ends meet."——意思成了"我想知道您能做什么来帮助我。"

数学与逻辑

许多著名的和一些不太著名的人都评说过逻辑与数学的相对地位。

222° 被误会的概念

人们发现（我不知道是怎么发现的），数学和逻辑本该只是

物理学的奴仆，却指望着它们的确定性力量来统治物理学。[17]

17 见培根《知识的成长》（De Augmentis）

223° 逐次逼近

人们普遍认为数学的确定性全在于它所依赖的永恒不变的形式逻辑原理。这……只是表达不完整的半句真理。另一半应该说，形式逻辑原理所具有那种持久性，在很大程度上是通过数学家们长久而多样的应用磨炼出来的。也许有人会说这是“一个循环论证”。我更愿意说它是数学家们熟知的逐次逼近法的过程的一个例子。(鲍歇)

224° 哪个是？

哈斯特德（George Bruce Halsted）说数学是逻辑的“大钳子”。难道逻辑不也是数学的“大钳子”吗？

225° 同一

……这场重要运动的两股支流，尽管发源不同，流经不同的路径，最后终于汇流到一起了：符号逻辑是数学，数学是符号逻辑，两者是同一的。(凯瑟)

226° 单子论

在莱布尼茨看来，如果构成我们知识的所有复杂的和显然没有关联的思想能分解为它们的基本元素，如果这些元素的每一个都能以确定的符号来代表，我们就能拥有一种“人类思想的字母表”。把这些符号（思想的字母）组合起来，就能形成一个真正的知识体系，在这样的体系中，现实会更充分地通过符号表现出来……于是，在莱布尼茨看来，完全以分析为基础的综合计算

应该是我们所能想象的最有效的知识工具。“我觉得，”他说，“除非我们为了简单计算而抛弃复杂推理，为了固定符号而抛弃模糊而不确定的语言，纷争就永远不会停止，教派的言论也永远不会平息。”这样看来，“谬误不过是计算的错误”。“当纷争出现时，将再也不需要哲学家来争论了，让两个会计师来就行了。他们什么也不用做，只需要拿出铅笔，拿出账本（如果愿意，还可以招呼几个朋友来），然后说，‘让我们来算算吧。’”（拉塔）

227° 科学教育的基础

就我们所自觉认识的而言，形式的思想是所有精确知识的方法，逻辑和数学是科学教育的恰当而惟一可靠的基础。（勒费弗）

228° 又是一样的

纯数学是布尔在他称为“思想法则”的一篇作品中发现的……他的工作与形式逻辑有关，而这和数学是一样的。（罗素）

229° 还是一样的

数学不过是符号逻辑的高级发展。（惠商）

230° 符号逻辑

许多逻辑学家否认形式逻辑，说它的趣味在于数学；许多数学家否认形式逻辑，说它的趣味在于逻辑。（怀特海）

231° 新逻辑

［下面两个故事改编自 Howard Eves 和 C. V. Newsom《数学基础和基本概念导引》（*An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, revised edition. Holt, Rinehart and Winston, 1965.）］

力的平行四边形法则与公理方法之间，存在着有趣的相似（如果不把它推得太远的话）。根据平行四边形法则，力的两个分量形成一个合力。改变力分量可以得到不同的合力，当然也可以从不同的分量得到相同的合力。现在我们来看，正如合力取决于两个初始的力的分量（图3），数学理论取决于一组假设和一个逻辑。就是说，构成数学理论的一组命题产生于两组命题的相互作用：一组被称为假设的初始命题和一组被称为逻辑或程序法则的命题。相当长的时期以来，数学家已经意识到了第一组初始命题（即假设）是多变的，但直到最近，人们还普遍认为第二组初始命题（即逻辑）是固定的、绝对的和永久的。其实，这是仍然流行于大多数人的观点。除了少数学逻辑的学生而外，似

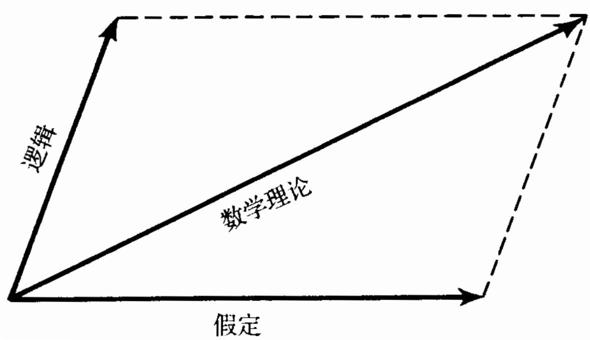


图3

乎不能想象亚里士多德在公元前4世纪规定的逻辑法则能有任何改变。人们普遍的感觉是，这些法则是宇宙结构的基本属性，是人类理性本质的固有特征。和已往的其他许多绝对事物一样，这个绝对也被颠覆了，不过那是在1921年。关于逻辑的现代观点，最好的表述莫过于美国杰出逻辑学家切尔奇（Alonzo Church）的如下一段话：

> 我们没有为任何逻辑系统赋以任何惟一的特征或绝对的真理。形式逻辑的基本属性是抽象，是因为它在描述和系统化经验和观测事实的作用而创造的。大致说来，它们的性质取决于这种有目的的应用，而就其精确特征说，那些性质依赖于逻辑创造者的任意选择。我们可以拿描述物理空间的三维几何做类比。我们相信，在这个例子中，类似逻辑的那种状态更为大家所认识。几何的基本特征显然是抽象的，例如，它的平面没有厚度，它的点在平面上不占面积，点集包含无穷多个点，直线有无穷大的长，还有其他许多不可能在任何物理实验中产生的东西。然而，几何能以独特的方式用于物理空间，在几何定理与空间物质实体的观测事实之间建立极其有用的对应关系。在几何的构建中，为物理学的应用只是大致指引抽象的元素应该具有什么性质，而并不完全规定那些性质。这样，就可能出现（而且事实上也真的出现了）多种可用于描述物理空间的几何。同样，毫无疑问存在多个形式系统，同样起着逻辑的作用，这些系统中，可能有一个比另一个更令人满意、更方便运用，但不能就说这个是对的而那个是错的。

232° 新逻辑简史

新几何最先是从否定欧几里得的平行公设开始的，新代数最先是从否定乘法交换律开始的。同样，所谓“多值”逻辑，最先是从否定亚里士多德的排中律开始的。根据排中律，选言命题“$p \vee$ 非 p”是同义反复，命题 p 在亚里士多德的逻辑中总是非对即错的。因为一个命题可以取两个真值中的任何一个，即“真”或“假”，这种逻辑即所谓的双值逻辑。1921 年，卢卡塞维茨（J. Lukasiewicz）在一篇两页的短文里考虑了一种三值逻辑，在那个逻辑中，命题 p 可以有三个可能的真值。不久后，波斯特（E. L. Post）独立于卢卡塞维茨的工作考虑了 m - 值逻辑，其命题 p 可以取 m 个可能的真值（这儿 m 是大于 1 的整数）。如果 m 大于 2，逻辑就叫“多值的”。m - 值逻辑的另一项研究是卢卡塞维茨和塔尔斯基（A. Tarski）在 1930 年提出的。接着，1932 年，莱辛巴赫（H. Reichenbach）将 m - 值逻辑系统推广到无穷多值逻辑，其中任一命题 p 可以取无穷多个可能的值。

并非所有新逻辑都属于刚才讨论的这种类型。例如，海亭（A. Heyting）为直觉主义学派的数学家发展了一种双值逻辑，它与亚里士多德逻辑的区别在于它并不普遍接受排中律（即双重否定律）。于是，这种特殊目的的逻辑和多值逻辑一样，呈现了不同于亚里士多德的法则。这样的逻辑被称为非亚里士多德逻辑。

事实证明，“非亚逻辑”与非欧几何一样是有用的。实际上，莱辛巴赫就是为了概率的数学理论的基础而构建他的无限多值逻辑的。1933 年，茨维基（F. Zwicky）发现多值逻辑可用于现代物理学的量子理论。伯克霍夫（Garrett Birkhoff）、冯·诺伊

曼和莱辛巴赫提供了那种逻辑的许多细节。卢卡塞维茨将三值逻辑用于确立我们熟悉的双值逻辑假设的独立性。非亚逻辑在未来数学发展中会起什么作用，现在还说不定，但考虑这个问题是很有意思的。海亭逻辑在直觉主义数学的应用说明那种新逻辑可能有着数学价值。

计　　数

计数的基础是一一对应的概念。

233° 卵石和羊

通过确立一一对应的原始计数方法，最早大概可以追溯到荷马的尤利西斯的传说。尤利西斯在弄瞎了独眼的波吕斐摩斯



尤利西斯弄瞎了独眼的波吕斐摩斯

（Polyphemus）后，离开了独眼巨人的土地。据说，那个可怜的巨人每天早晨都坐在洞穴入口的附近，每让一只母羊从洞里出来，就从一堆卵石中捡起一块来。等到了黄昏母羊回来的时候，他每放进一只羊，就放下一块卵石。就这样，如果早晨捡起的卵石都放完了，他就知道他所有的羊都回来了。

234° 女人与刻痕

有个退休数学教授，和著名的希尔伯特在晚年一样，很喜欢和女士们玩儿闹，77 岁时还在大白天引诱她们出去。甚至在 77 岁生日那天，教授决定在一根藤条上为每个被他征服的女人刻一个记号。也因为这个，他死在 78 岁生日那天——他错把藤条当手杖了。

235° 纽扣

“你会写字吗？”

“会！”

“会数数吗？”

“会！”

“比我能干。我用手指头数数，指头用完了就数纽扣。我的纽扣没有一个看不见的——就是说，都在每天的衣服上呢，把总和留在星期天，然后在布道的时候把它们加起来，记在背心里。你不要告诉别人。”

“好的。”

“那好。我不想人家知道。见过吉普赛人吗？”

“噢，是的，经常见。”

“下次你看见时，你会明白他干吗带那么些纽扣。你还有好

多东西要学呢。”[18]

18 见 Sir Arthur Quiller-Couch, *The Ship of Stars*。

数

几个关于数的故事，有可笑的，也有严肃的。

236° 没有

我们华盛顿的许多政府官员最近玩儿了一个把戏，他们问那儿的一个迷人的德国小姐，是否曾经和参议员们出去旅行。她愤怒地回答“没有！”[19]——结果被驱逐出境了。

19 德语 Nein，发音如英文数字 9。

237° 简化字

有个老板抱怨他的秘书写字像数学家——她喜欢把词儿简化到字母表中最靠近的那个字母。

238° 实验误差

一个实验物理学家检验所有奇数都是素数的猜想。他这样开始了：“3——素数，5——也是素数，7——还是素数。9——哎呀！出什么问题了？接着再看看呢。11——素数，13——还是素数。看来，9 一定是实验误差！”（M. H. Greenblatt）

239° 数的心理学

著名的“贝蒂食谱”有一种盒装烤饼原料[20]，面包师需要向原料里加一只鸡蛋，半杯水（不超过一大汤匙），用电动搅拌器以中等速度搅拌两分钟，倒在涂满油的 9 英寸平底锅上，然后在适当温度（350°F）的烤炉上烹制 35 分钟。

20 1921 年，美国明尼阿波利斯的 Washburn Crosby 面粉公司，以个人名义（以老板的姓 Crocker 加一个女职工的“热情友好的”名字 Betty）回答众多消费者提出的烘焙问题，后来就成为著名的“Crocker Betty”食谱。还有多事的艺术家为贝蒂女士画了肖像。

现在，只加半杯水也一样能把饼做好，但通过访问和消费研究发现，食谱太简单了，面包师会觉得没有面子。就是说，如果原料调制太容易，老实的面包师会觉得烤饼不是自己做出来的，也就不能拿它来炫耀了。所以，食谱必须修改，虽然还是简单，但要显得很费工夫，既要称量，又要精选原料。结果发现，要面包师用一汤匙水恰好能让她感到兴奋，而且用普通厨具来度量，也不会有多大误差。这样，面包师的内疚感消失了，觉得自己做了创造性的事情。结果，那种包装的面饼原料卖出了数百万盒。

240° 最小的毕达哥拉斯三角形的数字游戏[21]

21 最小的毕达哥拉斯三角形就是三边 a，b，c 分别为 3，4，5 的直角三角形。这是特里格编的句子。

1 – 内半径

2 – 内直径，$a+b-c$

3 – 短边 a

4 – 长边 b

5 – 斜边 c

6 – 面积 $ab/2$

7 – 直角边和 $a+b$

8 – 短边加斜边 $a+c$

9 – 长边加斜边 $b+c$

0 – 它的全部含义

241° 普塞尔（Henry Purcell）的“轮唱”

当 V 和 I 相遇，

我们得到 6 号房间和街道，

当 I 和 V 再相遇，
我们只能得到 4，

当 V 离开了我，
可怜的我只剩下 1。

[引自“轮唱俱乐部或快乐伙伴，三声部和四声部轮唱歌曲选”，第一部分，Da Capo Press，N. Y.，1965 年重印。]

轮唱原是一种三声部或更多声部的歌唱形式，每个歌手相继唱出相同的旋律。后来，常借这种形式将文字组合起来，产生滑稽的效果。（参见《韦氏英语词典》（*Webster's New International Dictionary of the English Language*）1956 年第 2 版。）（John F. Bobalek）

242° 奇异的两年

现代美洲的历史始于 1492 年，那年意大利航海家哥伦布（Christopher Columbus）来到了这片新大陆。原子时代始于 1942 年，那年意大利物理学家费米（Enrico Fermi）实现了第一个核反应。

243° 给好女孩儿打分

卢梭（Jean Jacques Rousseau，1712 ~ 1778）是法国作家和政治哲学家，他的思想激发了法国大革命的领导者们。有一次，一个年轻的女士问他，“一个年轻女人应该具备什么特征才能让她的男人幸福？”卢梭在一张纸上写着

美丽：0

持家能力：0
财产：0
好脾气：1

他解释说，“如果一个女孩儿只有好脾气，那她有 1。如果她还有别的好处，那她就能有 10，100，1000 等等。但如果前面没有那个 1，那她就什么也没有了。”

244° 新数学的妙用

下面的地产广告出现在 1973 年 4 月的《东方》（*Down East*，缅因州的一家杂志）第 80 页：

> 最佳位置。在坚固的传统建筑中，一年的任何时候，从每一扇窗户都能欣赏同样美丽的大海风光，一定令你诗兴大发。有可爱的壁炉，浴室和卫生间，4（用新数学是 5）个卧室，另附车库、工具房。低税。物有所值。（Janet B. Goodhue 公司.）

245° 误解

一对 60 多岁的退休老夫妻在当地的一家超市买东西。太太在杂志架前停下来，看了看陈列的杂志，选了一本放进篮子里。几分钟后，她回到架子，放回杂志。“你不是想买那本吗?”先生问。

“现在不想了,”太太说。“我对标题感兴趣，‘70 的性感’，可我现在明白了，它说的是 1970 年代。”

246° “40” 的一种说法

马林凯人将40说成dibi，“床垫”，其来源是40个指头的总和，借德拉夫斯（Delafosse）的话说，“因为夫妻躺在同一张床垫上，他们一共有40个手脚指头。”（Claudia Zaslavsky）

247° 十进制的另一个“合理”解释

在《重游数学圈》的第一个故事里，我们对10进制计数的起源提出了一些想象的而非历史的解释。图4说明它还有别的“合理的”解释。

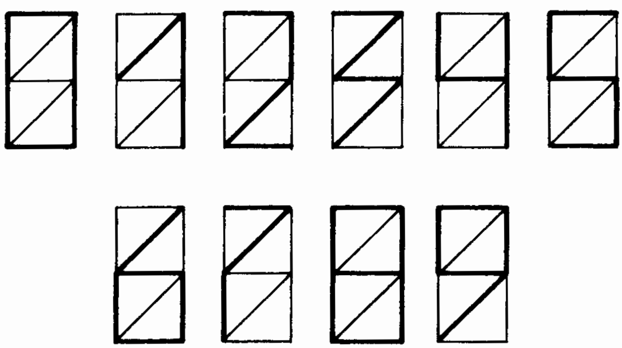


图 4

248° 在罗马

在大众电视节目《好莱坞广场》里，有人问林德（Paul Linde），“如果你在罗马，遇到一个女人说她是XL，请问她多大年纪了？”林德想都不想，脱口回答，“谁管呢，她都特大号了。”

249° “兽化”作者

伯巴勒克（John F. Bobalek）为作者编了一句话：HOWARD

22 以英文字母的顺序计数，这句话的所有字母代表的数字之和为666。关于“兽数”，参见《走进数学圈》130等。

W. EVES, A PROFESSOR OF MATHEMATICS AND DOCTOR OF PHILOSOPHY.[22]

250° “兽化”希特勒

我们很容易把希特勒（Hitler）“兽化”了，只要把那6个字母代表的数字加起来：A为100，B为101，C为102，等等。

251° “奇”谈

麦尔哈伯（John Mairhuber）教授听说不存在小于10^{100}的奇完全数，评论说，“那似乎说明奇完全数还不够。”维宁（Reverend Thomas Vining）又针对这话说，“是啊，如果一个完全数就够了，那一定是奇怪的。”

252° 没有无理数

约利（R. F. Jolly）讲过一个他和学生的对话：

学生：无理数不存在！

约利：噢？

学生：上帝是完全合理的神，所以他的所有作品都是有理的。因此不存在无理数。

253° 无处不在的黄金比

黄金比$\phi=1.61803398\cdots\cdots$是一个无理数，出现在许多不同的场合。为了说明$\phi$的那些性质，纽约市的隆克（F. A. Lonc）做过一些稀奇古怪的事情。他测量了65个妇女的身高和她们肚脐的高度。他报告说，妇女的平均身高除以肚脐的高度大约是1.618。他还说，那些比例不满足黄金比的妇女，是因为存在臀

部伤残或其他身体缺陷。

对　数

254° 没一个好词儿

德国讽刺作家拉本纳（Gottlieb Wilhelm Rabener，1714～1771）在哥廷根访问卡斯特纳（Abraham Gottlieb Kästner，1719～1800）时，发现桌上有一本对数表。他浏览了一遍，说，“整本书没有一个可以欣赏的词儿。”“是没有，”卡斯特纳回答，“可它有许多可以欣赏的数！”

255° 教育的变化

德国著名哲学家和历史学家费歇尔（Kiano Fisher，1824～1907）讲过一个有趣的对数的故事。他的两个同学有个头脑简单的叔叔，偶尔会看他们的家庭作业，其实他对看到的东西一无所知。有一次，叔叔碰巧见孩子们在用韦加（Vega）的《对数表》，那书从头到尾都是数，也只有数。他突发好奇，问孩子们书里的内容。他们告诉他，书里包含了欧洲所有房屋的数字。那天晚上，在当地的露天啤酒店里，叔叔告诉几个老朋友说，尽管他上学的时候也有很多东西要学，但和今天的要求比起来，也算不得什么了——孩子们现在还得学会全欧洲的房号呢。

256° 图文数学家

曾经流行过一本小说，在书中作者塑造了一个数学教授，在学生时代曾靠着背诵韦加的对数表来证明他的数学才能，结果精神崩溃了。

德摩根称那些不懂数学却想描述数学家的人为"图文数学家"(graphomath)。当司各特让他幻想的计算家拉姆塞(Dave Ramsay)"凭着不朽的纳皮尔的骨头"发誓时,[23]也是个图文数学家。另一个数学图文数学家让他的数学英雄不停地"做加法",还有个图文数学家则声称他的主人公总是沉浸于"计算双重微分"。

23 参见《回归数学圈》"余音"RMH38。

257° 悲惨的结局

韦加(Baron Georg von Vega, 1754 ~ 1802)是军官,也是数学家,以他的战役和大对数表出名。据说,1802 年他因为"金钱和手表"被人杀害了。

258° 一部重要作品

对数的发明和早期对数表的计算是精确科学历史上一页动人的篇章,除了牛顿的《原理》,这个国家出版的数学作品还没有哪部能产生如此巨大的影响,也没有哪部能像纳皮尔的《说明》(*Descriptio*)[24]引起那么多的兴趣。

24 即纳皮尔 1614 年的《对数法则的奇异说明》,参见《走进数学圈》138 前面的引言。本文见 J. W. L. Glaisher,《不列颠百科全书》第 9 版。

算　　术

259° 柯西与算术神童

法国牧童蒙多(Henri Mondeux, 生于 1826 年)是个算术神童,1840 年 14 岁时在巴黎理工学院师生面前做过一场计算表演。表演从观众提问开始。蒙多敏捷而正确地解答了问题。最后,有个问题牵涉了很长的计算,蒙多坐下来,陷入了沉思。就在他几乎崩溃的时候,一个人从观众中站起来,成功地给出了答

案。那人就是数学家柯西（Augustin – Louis Cauchy，1789 ~ 1857）。

为了保护神童，当时也在场的物理学家科里奥利（Gaspard Gustave de Coriolis，1792 ~ 1843）站出来挑战柯西，让他也提一个问题给孩子回答。柯西让小孩儿求前 20 个自然数的 4 次方之和。蒙多闭上眼睛开始计算。柯西也闭上眼睛，但突然又睁开了，喊道，“722 666”。当然，柯西没有走小对手的笨拙的计算路线，而是用了下面的公式：

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2\cdot 3\cdot 5}$$

为了得到需要的结果，柯西只需要计算 574 与 1259 的乘积，而那是很容易心算的。[25]

25 埃德译自《数学家轶事》。

260° 人脑计算机

克莱因（Willem Klein，生于 1912 年）是著名的“人脑计算机”。他是犹太医生的儿子，战时住在阿姆斯特丹，一家人不得不躲避纳粹的迫害。就在逃难期间，克莱因对数字产生了浓厚兴趣。经过艰辛的训练，他成了心算高手。战后，他作为“10 000 磅大脑的人”，在欧洲的音乐厅进行了现场表演。1958 年，坐落于日内瓦的欧洲核子研究中心（CERN）发现了他非凡的才能，雇佣了他，因为他比中心当时拥有的计算机要高效得多。

尽管有了工作，克莱因仍然像个玩儿杂技的，他最近打破了自己 3 分 43 秒的记录，提高了整整 1 分钟。在 CERN 礼堂一群聚精会神的观众面前，克莱因心算了一个 499 位数的 73 次方根。在 2 分 43 秒时他宣布了答案，6 789 235。他的答案得到了现代

电子计算机的证实。

由于现代计算机的速度远远超越了克莱因，这位伟大的人脑计算机决定今年（1976）从 CERN 退休，回到阿姆斯特丹，访问那儿的学校，“教孩子们如何享受数字的乐趣”。

261° 性别数字

根据毕达哥拉斯学派的传统，偶数代表“女性”而奇数代表“男性”，下面是一些相关的发现（特纳）：

1 所有的男人都是奇异的。

2 对任意两个男人，存在一个女人（正好等于两个奇数之和!）。

3 只有一个青春的女人。[26]

4 任何女人是男人的两倍。

5 两个女人乘她们的数时，男人只好靠边儿了。

6 任何两个女人之间至少有一个男人。

7 任何青春的女人都可能背叛她的爱人。

8 一个男人总是跟着一个女人；反之亦然。

9 每个女人至少有一个青春的因子，却不是任何男人的公因子。

10 考虑所有情形，当你深入问题的根本，会发现男人和女人是一样无理的。

26 只有一个偶素数，而“素”（prime）有很多意思，这儿权且译为“青春的”。

262° 过分敏感

据说毕加索11岁还不会算术，因为数字7在他看来就像颠倒的鼻子。

263° 好借口

老师问约翰他的算术家庭作业卷子哪儿去了，小孩儿解释说，“我在来学校的路上用它叠了一个飞机，被人劫走了。”

264° 为什么不呢？

你听说过数学老师家里的植物吗？它长着平方根呢。

265° 告诉我答案

算术测验时，约翰用三种方法解一个问题，得到了三个不同的答案。他弄不清哪个是正确的，最后愤愤地嘟囔，“请正确的答案起立！”

266° 真的很近

今天早上的算术测验中，我和正确答案离得很近。它们就隔着两个座位。

267° 白天的成绩

“今天的算术课学了什么？”约翰的妈妈问他。

“我学了 7 加 7 等于 15。”约翰回答。

“可那是错的。”妈妈说。

“是吗？那我什么也没学了。”约翰说。

268° 方法

小女孩儿在客厅地板上做算术家庭作业，还不停地喊厨房的妈妈帮忙。“129/3 是多少？”她喊着。妈妈告诉了答案。“196/7

呢?”她又喊，妈妈又说了答案。

这样问了好多问题。最后妈妈问，“你为什么不自己解决那些问题呢?”

“噢,”女孩儿解释说，“我们老师说了，我们可以用我们想用的任何方法。”

269° 加法

几个学生被叫到黑板前算18，27与34之和，老师来回走着看他们算。当她走到班上最高大的同学背后时，发现他正穿着运动衫高兴地站在作业的旁边。他在黑板上写的是

$$\begin{array}{r} 18 \\ 27 \\ 34 \\ \hline \text{HIKE} \end{array}$$

HIKE[27]

27 HIKE 即“远足”，HIKE#79是一种远足探险项目。

270° 难题

凡迪弗（H. S. Vandiver）是一流的费马大定理及其相关问题的专家，在一篇文章里讨论了这样一个问题：确定是否存在无穷多个p使$(p-1)!\ +1$能被p整除。他指出，“这个问题在我看来具有这样的性质，假如我能在死后的任何时候复活，还有某个数学家来告诉我它已经确定地解决了，我想我会马上死过去。”（穆瑟）

第四象限

从叔本华谈数学到标点问题

计 算 机

我们听过许多关于高级电子计算机的故事，都或多或少地嘲笑那些机器。也许这只是反映了人类对机器的敬畏和恐惧。不管怎么说，我们这儿还要再讲几个计算机的故事。

271° 叔本华谈数学

叔本华说数学是最低级的精神活动，因为它可以用机器来做。（穆瑟）

272° 贝尔谈电子计算机

贝尔（Eric Temple Bell）1883年生在苏格兰，在英格兰接受早期教育。1902年，他来到美国，在斯坦福大学学完了本科，然后在华盛顿大学和哥伦比亚大学获得硕士和博士学位。相继在华盛顿大学、芝加哥大学和哈佛大学任教之后，他在1926年被聘为加州理工学院数学教授。他在美国数学界有着强大的影响力。他是著名的数论专家，对当代科学也很感兴趣。他知识渊博，文笔流畅，见识卓绝，心血来潮时能写出优美的半专业半通俗的数学和数学史的作品，也因此而名声远播。除了专业作品外，他还以约翰·泰恩（John Taine）的笔名写过几部成功的科幻小说。他于1960年去世。

下面是贝尔博士关于现代电子计算机的两段评论：

1“关于这些能帮助人类薄弱智能的奇异机器，我没什么要说的，原因有两点：我一贯厌恶机器，我所理解的惟一机器是独轮车，而那也不够完全。”

2“我没看出那机器已经废黜了数学的皇后地位。数学家如果完全离开大脑也许就毫无价值了。”

273° 肇事者

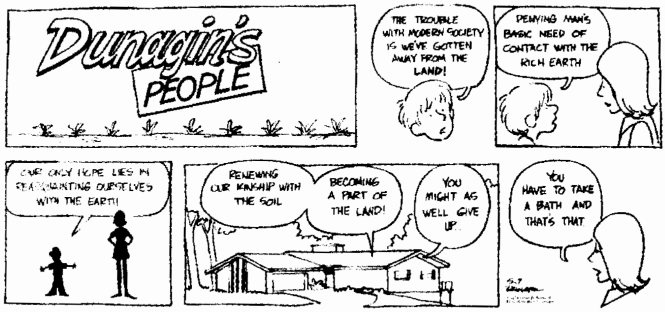
不久前，1971 年，有报纸报道一家英国大公司的雇员们不满劳资部门的一系列错误，威胁说如果不解雇当事人，他们就要罢工。公司最后让步，开除了肇事者——原来是一台现代计算机。于是，财会人员重返岗位，公司也一片平和。

274° 比较

两个数学家像侏儒似地立在占满一堵墙的庞大的计算机面前。运行几秒钟后，机器吐出一张纸条。一个数学家拿起纸条，仔细检查了一会儿，交给他的伙伴说，“你有没有发现，500 个训练有素的数学家，每人每秒写 3 个数字，日夜不停地工作，也要 1500 年才可能犯下如此重大的错误！”

275° 杜纳金的漫画

一个年轻漂亮的中学二年级老师站在讲台后面，一个小男孩



杜纳金的系列漫画“人物”

儿站在前排位置，手里拿着一台小小的电动机器。老师对小孩儿说，“不，罗尼，不用你的电子计算机，你得告诉我，2 加 2 等于几?”

276° 计算机的语言翻译

有个广为流传的故事说，一个工程师为计算机编了一个程序，能将任何一种语言翻译成另一种语言。在一次技术会上，工程师为了演示他的程序，请一个观众说一句话让机器来翻译。观众说了句“眼不见，心不烦”。他把句子输入计算机，然后请另一个观众说翻译成哪种语言。观众要“俄语”。于是，他把指令输入机器，机器很快打印出一句俄语。可在场的人都不懂俄语，而观众很想知道翻译是否令人满意。最后有人想出一个好办法，现在把那句俄语输入机器，让它还原成英语。工程师照办了，一会儿，计算机打印出来，“眼不见，心不烦”先译成俄语，然后还原为英语，其结果是“瞎眼的白痴”。

类似的实验还有，“心有余而力不足”被翻译成“酒好而肉烂”。[1]

1 “心有余而力不足”的原文是“The spirit is willing, but the flesh is weak.”

277° 老练的计算机

一家高级电子计算机公司欢迎来客访问，每天在小礼堂举行两次免费的 40 分钟演讲，感兴趣的客人可以听到有关那些神奇机器的性能，还能见识其中一台机器演示它惊人的威力。一个服务员坐在礼堂门口的小桌子前，每走进一个观众，他就在小便笺上画一个记号，就像下面的样子：



278° 理解

最近在荷兰举行的电子计算机展览会上，茱莉安娜(Juliana)女王指出，她不仅不懂那些机器，也不理解能懂那些机器的人。(穆瑟)

279° 最长的根

如果在一个实数的十进制表示中，10 个数字以相同频率出现，就说它是简单正态的；如果所有相同长度的数字段以相同频率出现，就说它是正态的。例如，人们相信（但还不知道）π，e，$\sqrt{2}$都是正态数。为了得到这些数字的正态性的统计证据，它们已经展开到小数点后很多位了。

1967 年，英国数学家们靠计算机把$\sqrt{2}$算到了小数点后面 100 000位。1971 年，哥伦比亚大学的杜卡（Jacques Dutka)得到了$\sqrt{2}$的 100 多万位——经过 47.5 小时的计算，电子计算机将$\sqrt{2}$至少展开到小数点后 1 000 082 位，密密麻麻地打印了 200 页，每页有 5 000 个数字。这是迄今为止最长的一个无理数方根。

280° 计算机的艺术

许多高级计算机都允许添加辅助设备，这些设备由计算机控制，因而也可以程序化。辅助设备之一是绘图仪，它能在计算机程序控制的坐标下绘制“曲线”。尽管它能画的只是端点相连的直线段，但使直线段足够短，就能很好逼近曲线。

1971 年，最新的计算机绘图仪制造商 Hewlett-Packard 公司为他们的用户赞助了一场计算机艺术大赛。大赛获奖作品发表在

公司专门介绍计算机和辅助设备的《键盘》杂志。一等奖给了得克萨斯埃尔帕索的米尔纳里奇（Paul Milnarich），其作品《波》是一幅动人的三维图像，是如下方程

$$f(x,y)=[\exp(2\sqrt{(x^2+y^2)}/1500)][\sin 2\sqrt{(x^2+y^2)}]$$

正弦曲线序列形成的几个共心椭圆。二等奖给了宾夕法尼亚州费城的巴伯（G. Winston Barber），其作品《肖像》是一张面具，由方程

$$R=A_i(B+\sin n\boldsymbol{\theta}_j)$$

在 A 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的不同极限下的曲线来生成面具的不同部位。三等奖给了加利福尼亚州奥本的阿什比（John A. Ashbee），其作品《玩伴》是一张迷人的线描女子裸体坐像，由形如

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4$$

的四次多项式图形的 42 个碎片组成。

大赛其他获奖作品是得克萨斯圣安东尼奥的克拉赫（Lt. Ronald P. Krahe）的《肺活量》，得克萨斯格林维尔的贝克（N. M. Baker）的《无名》，加利福尼亚圣迭戈的谢培德（W. E. Shepherd）的《随机图》，缅因州 Orono 的奥托（Fred B. Otto）的《三维振子的等距表示》，康涅狄格维斯特波特的齐默曼（Peter Zimmerman）的《无限》。

281° 计算机下棋

国际象棋大师列维（David Levy）在 1976 年 5 月的《棋艺生活和评论》杂志发表了文章《机器人来了——是吗?》，他在文中指出，过去的两年里，人们对计算机棋艺的兴趣与日俱增，下棋的程序在美国和加拿大像雨后春笋一样涌现出来，欧洲举办了两次计算机大赛。1974 年，第一届世界计算机象棋锦标赛在斯

德哥尔摩举行，莫斯科控制科学研究院的程序“Kaissa”获胜。Kaissa 以全胜的战绩战胜了来自美国的 4 个程序，来自不列颠的 3 个程序和分别来自奥地利、加拿大、匈牙利和挪威的程序。

最有名的计算机象棋大赛是 ACM（计算机协会）组织的年度锦标赛。1975 年 10 月，第六届 ACM 大赛在明尼阿波利斯举行，西北大学的程序“棋艺”（Chess）4.4 获胜。这个程序的更早版本曾赢得了开始的 4 届 ACM 大奖，但 1974 年在圣迭戈的第五届大赛，冠军被加拿大的程序“树蛙”（Treeforg）夺走了。

尽管计算机棋艺程序进步很快，列维还是自信没有哪个程序能在 1978 年 8 月之前的任何大赛中战胜他。他拿出 2500 美元来打赌。列维觉得，至少要等 25 年才可能有程序赢得 FIDE 国际象棋大师的头衔。[2]

2 FIDE，Fédération Internationale des Échecs，国际棋联。

282° 荷兰的计算机邮票

计算机大踏步走进了艺术世界。1970 年 4 月 7 日，荷兰发行了一套 5 张的邮票，由带绘图仪的计算机设计。计算机是爱因霍芬（Eindhoven）科技大学的计算机科拉（Cora 1）。附带的绘图仪能画端点相接的线段，其坐标事先给定，或由部分程序计算。它还能画圆或圆弧。程序包括沿某个角度转动坐标系、沿一定方向平移坐标轴、改变某个坐标的尺度。科拉可以与更大的计算机联合制图。邮票中有两张是在技术大学的 EL－X8 计算机上设计制作的。

五张邮票尺寸都是 25×36mm，由哈勒姆（Haarlem）的佐尼（Joh. Enschedé en Zonen）双色套印 100 张，他也是荷兰钞票的印制者。

12 分邮票画的是一个立方体的轴测法投影，其表面包含一

个一组同心超椭圆$(x/a)^n+(y/b)^n=1(n>2)$包围的中心圆。

15 分邮票利用透视程序画了几个被分解为多个小立方体的立方体，省略了其中的所有垂线。

20 分邮票包含沿相反方向旋转 90°的两条垂直线段。

25 分邮票将仿射程序用于圆，得到三个双重嵌套的椭圆。

45 分邮票是环绕一公共原点的四条螺旋线。

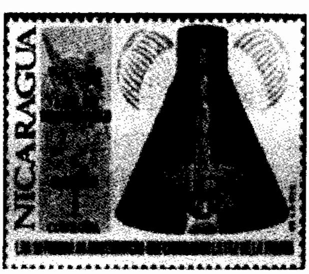
这些邮票是邮政局的平面设计艺术家欧克辛纳尔（R. D. E. Oxenaar）创作设计的。

283° 尼加拉瓜的公式邮票

既然说到了邮票，我们也许还该讲讲下面的故事，尽管它与电子计算机无关。

1971 年，尼加拉瓜发行了系列邮票，以纪念世界上“10 个最重要的数学公式”。每张邮票是一个配以恰当插图的特别公式，背面以西班牙文简单介绍了公式的重要意义。

系列邮票的第一张是基本的算术公式“1 + 1 = 2”，画了一个学会计数概念的古埃及人。邮票纪念的其他古代数学成就是毕达哥拉斯关系“$a^2+b^2=c^2$”和阿基米德杠杆原理“$w_1d_1=w_2d_2$”，一个是数学的基础，另一个是工程学的基础。关于后来的成就，一张纪念纳皮尔的对数发明，一张是牛顿的万有引力定律。在邮票纪念的更现代的公式中，有麦克斯韦的四个电磁学方程，玻尔兹曼的气体方程，齐奥尔科夫斯基（Konstantin Tsiolkovskii）的火箭方程，爱因斯坦著名的质能方程



纪念火箭方程的邮票

“$E=mc^2$”，还有德布罗意（Louis de Broglie）的革命性的物质波方程。

看到这些公式受到如此纪念，科学家和数学家应该感到欣慰，因为这些公式对人类进步的贡献远远超过了经常出现在邮票上的许多帝王将相。

284° 计算机的胜利

多年来（自 1850 年后不久开始），最有名的未解数学难题之一是一个猜想：用四种颜色足以填充平面或球面的任意地图，使图上有公共边界的两个国家没有相同的颜色。人们为这个问题投入了无数的努力，得到了一些部分结果，但问题本身还是那么桀骜不驯。后来，1976 年夏，伊利诺斯大学的阿佩尔（Kenneth Appel）和哈肯（Wolfgang Haken）通过大量复杂的计算机分析证明了猜想。证明的细节写满了数百页，计算机算了 1000 多个小时。证明方法涉及对 1936 种可约化图形的检验，为了证明每一种图形是可约化的，还需要进行 50 万种逻辑选择。证明的最后阶段历时半年，于 1976 年 6 月完成。整个 7 月都用来对证明进行最后的检查，结果于 1976 年 7 月 26 日发表在《美国数学会会刊》。

阿佩尔－哈肯的证明无疑是一项惊人的成就，但它那 2000 多个例子的计算机分析和 100 亿次的逻辑判断，实在远远偏离了优美的数学。当然，方法本身的优美至少和问题的解决一样重要。也许正因为这一点，1976 年 8 月哈肯在多伦多大学向几百个数学家报告他们的结果时，只赢得稀稀落落的一点儿礼貌的掌声。

285° 计算机病

不幸的是，不论普通大众还是学数学的年轻学生，越来越多的人感觉，数学问题从现在起将由足够聪明的计算机来解决，而且今天的整个数学都是计算机引导的。数学老师们必须同这种计算机痴狂病进行斗争，要不断地告诫大家计算机不过是算得很快的机器，只有对那些需要大量计算或枚举的数学问题，它才能发挥作用。

记 忆 法

数学家设计了很多方法来帮助记忆一些重要的原理、公式和数字。例如，在初等三角学课堂上，同学们用“所有同学都学微积分”(All students take calculus，而在纽约州，可以说“Albany State Teachers College”）来帮助记忆以下规则：在第一象限所有(all）三角函数都是正数，在第二象限只有正弦（sine）及其倒数（余割）是正数，在第三象限只有正切（tangent）及其倒数(余切）是正数，在第四象限只有余弦（cosine）及其倒数（正割）是正数。

我们已经在《重游数学圈》R41，119 和 145 讲了几个数学记忆的例子，下面再补充几个。

286° 法国人记 π

如果用每个单词的字母数来代替，那么下面的法文诗就给出了 π 的前 26 位正确小数：

> Que j'aime à faire apprendre
>
> Un nombre utile aux sages
>
> Immortel Archimède artiste ingénieur
>
> Qui de ton jugement peut priser la valeur
>
> Pour moi ton problème
>
> A les pareils avantages![3]

最后一行代表数字1379，而 π 的展开应该是3279。

格林布拉特（M. H. Greenblatt）说，盖莫夫（George Gamov）为《科学美国人》（1955年10月）写过一篇文章，其中写 π 的前5位小数是3.14158。后来，一个读者给杂志写信，批评盖莫夫把第五位写错了。盖莫夫在致歉信中解释说，错误源自他的拼写坏毛病，他是靠上面那首法文诗记忆的，但“apprendre”只写了一个“p”。

3 大意是：我想让你记住的是，一个对诸位聪明人都有用处的数字。对你的判断，就连不朽的阿基米德、天才的技师，也会称道它的价值；而对我来说，你的问题也有着同样的好处。

287° π 的另一种记忆

> Sir, I bear a rhyme excelling
>
> In mystic force and magic spelling
>
> Celestial sprites elucidate
>
> All my own striving can't relate.[4]
>
> 3. 14159/265358/979/323846

4 大意是，“先生，我有一首绝妙的小诗，有神奇的力量和魔幻的文字。但天上的精灵证明，我所做的一切都无关紧要。”

288° 不可能的

在《重游数学圈》R41，我们用四个句子来记忆 π 的小数。例如句子

> May I have a large container of coffee?

用单词包含的字母数来代替，我们就得到 π 的 7 位小数 (3.1415926)。这种记忆法中，最成功的例子是包括 π 的 30 位小数。还没人能写出一段文字超过 π 的 31 位小数，为什么呢？

289° π 的有理数记忆

π 可以用有理数来逼近，如

22/7 = 3.14 | 28

355/113 = 3.141592 | 92

104348/33215 = 3.141592653 | 92142

833719/265381 = 3.14159265358 | 108

它们分别正确给出 π 的 2，6，9 和 11 位小数。1939 年 7 月号《数学学报》发表了下面两个“分数”来记忆上面的后两个分数：[5]

$$\frac{\text{calculator will get fair accuracy}}{\text{but not to } \pi \text{ exact}}$$

$$\frac{\text{dividing top lot through (a nightmare)}}{\text{by number below, you approach } \pi}$$

5 两个“分数”的字面意思大概是，“计算者将得到很好的精度/但不是更精确的 π”，“用顶上的一堆（通过噩梦）/除以下面的数，你就得到 π 了。”

290° 一个三角记忆法则

如果将每个三角恒等式中的每个三角函数替换为对应的双曲函数，那么，只要改变包含两个正弦之积的每一项的符号，原来的等式依然成立。

291° 泊松分布

泊松（Poisson）分布说的是，如果平均发生 m 个事件，那

么 n 个事件发生的概率为

$$P_m(n) = (m^n e^{-m})/n!$$

为了记忆这个公式，格林布拉特发现了一个方法，它正好依次包含了 *mnemonic*（记忆法）的前 6 个字母：

(m to the n, e to the minus m, over n factiorial)

292° 容易

有个数学家老是记不住他家里的电话号码 2592。聚精会神考虑了几个小时后，他终于宣布，“我记住了！原来，数字 2592 是表达式 $xyzx = x^y z^x$（左边是 10 进制数字，右边是幂次的乘积）的 x，y，z 不同的惟一正整数解。”

格林布拉特说这是一个真实的故事。那电话是罗斯莱因（B. Rothlein）的，他在 1943 年到 1947 年间住在费城 41 号大街。

数 字 13

293° 1 美元的钞票和 13

多少人知道下面的有关 1 美元钞票的事情？

1 背面的不完整金字塔有 13 个台阶。

2 金字塔上面的词“Annuit Coeptis”有 13 个字母。[6]

3 美国秃鹰的一只爪子抓的橄榄枝有 13 片叶子，另一只爪子抓着 13 只箭。

6 这是一句拉丁格言，意思是“上帝支持我们的事业”。

294° 瓦格纳和 13

瓦格纳（Richard Wagner）的名字包含 13 个字母。他生于

1813 年，而 1 + 8 + 1 + 3 = 13。他创作了 13 部伟大的音乐作品。《唐豪赛》（*Tannhäuser*）是他最伟大的作品，完成于 1845 年 4 月 13 日，首演于 1861 年 3 月 13 日。1842 年 1 月 13 日，他完成《帕西法尔》（*Parsifal*）。《女武神》（*Die Walküre*）首演于 1870 年 7 月 26 日，26 是 13 的两倍。《罗恩格林》（*Lohengrin*）创作于 1848 年，但瓦格纳直到 1861 年才第一次听到它的演奏，正好是 13 年以后。他死于 1883 年 2 月 13 日，那年的首尾数字还是 13。

295° 原来如此

特雷尔(Claude Terrail)是巴黎塞纳河畔豪华的银塔饭店（La Tour d'Argent）的主人，他解释了他为什么迷信要 13 个人围坐一张桌子。"原因是，"他说，"大多数人都只有 12 付刀叉和盘子。"

梅森数

296° 梅森神父和他的数

形如 $M_n = 2^n - 1$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）的数叫梅森数，以神父梅森（Marin Mersenne，1588 ~ 1648）的名字命名，他是米尼玛派的一个修道士，在内弗斯（Nevers）和巴黎教哲学和神学，还坚持与当时的顶尖数学家们频繁地书信往来，而他的字迹几乎无法辨认。尽管梅森写过很多书，但他的名声却长留在数论，特别是与素数和完全数有关的理论。

梅森数的趣味在于两个方面——已知最大的素数是梅森数，

我们在梅森数的帮助下发现了完全数（即等于其所有真自然数因子之和的数）。

在1644年出版的《物理数学思考》（*Cogitata physico-mathematica*）的前言里，梅森提出过一个命题，意味着当 n 不大于257时，只有如下的数值使 M_n 为素数：

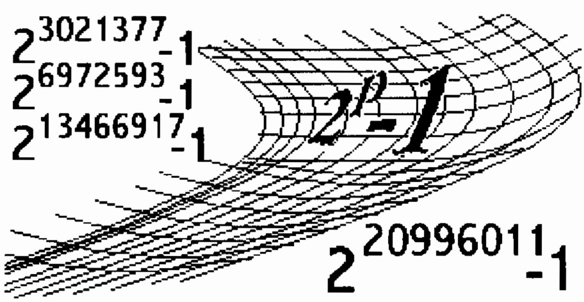
2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257

后来发现梅森的这个命题不对，既有遗漏的，也有多余的。我们已经知道，对 $n=61$, 89 和 107，M_n 是素数，而对 $n=67$ 和 257，M_n 是复合数。目前已知的 M_n 是素数的 n 值如下：

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937

对超过127的 n 值，M_n 的素数性质是通过现代电子计算机确定的。最近也最大的素数是1971年确定的。[7]

7 2004年5月15日，Josh Findley 发现了第41个梅森素数：$2^{24\,036\,583}-1$ 它有7 235 733位数字。



GIMPS（“梅森素数搜索网络”）自1998年以来发现的大素数

梅森遗漏的第一个素数 M_{61} 是一个19位的数，其素数性质分别是希尔霍夫（P. Seelhoff）在1886年和佩弗辛（J. Pervusin）在1887年确立的。梅森错划的第一个数 M_{67}，其合数性

质是弗昆博格（E. Fauquembergue）在1894年证明的，不过他的证明没有给出它的任何因子；科尔（F. N. Cole，1861～1927）在1903年才将M_{67}分解为两个大数之积。

四分之三世纪以来，直到1952年，39位数的M_{127}一直是已知最大的素数。

297° 一篇受欢迎的论文

贝尔在他迷人的《数学——科学的王后和奴仆》中，记述了一个动人的故事，说的是科尔1903年的一篇关于分解$M_{67} = 2^{67} - 1$的论文。

> 1903年10月，科尔在纽约参加美国数学会的一个会议，议程里有他的一篇题目平淡的论文："关于一个大数的分解"。大会主席请他宣读论文时，一向寡言的科尔走上黑板，一言不发，拿起粉笔就开始算2的67次方。然后，他小心地减去1。接着，还是不说一个字，他移到黑板的空白处，老老实实地计算
>
> $$193\ 707\ 721 \times 761\ 838\ 257\ 287$$
>
> 两个计算结果一致……美国数学会的听众们破天荒地第一次也是惟一一次为他们听到的报告热烈鼓掌欢呼。科尔还是一言不发，回到自己的位置。也没人向他提任何问题。

几年过后，1911年，贝尔问科尔用了多长时间来分解M_{67}。科尔回答，"三年的星期天。"

298° 娱乐

在第二次世界大战期间，为了消磨时光，法国数学家波里特

(Paul Poulet，死于 1946 年）分解了一个很大的梅森数 $M_{135}=2^{135}-1$，他发现

$$M_{135}=(7)(31)(73)(151)(271)(631)(23\ 311)(262\ 657)(348\ 031)(49\ 971\ 617\ 830\ 801)$$

生意的数学

299° 借据

“我借了 1000 元给一个狡猾的对手，”一个商人叹气说，“他却没给我打借条。我该怎么办？”

“严厉地写信，”朋友建议，“而且要求他立即归还 2000 元。”

“你没听明白我的话，”商人说，“我说的是借给他 1000 元。”

“我知道，”朋友点头说，“你的对手一定会气急败坏，然后把那个数写给你的，那样你就得到借条了。”

300° 最诚信的生意

一个怒气冲冲的顾客回到珠宝店，要求退还他几天前在这家店买的一块手表。他气愤地说，“那表每小时慢 15 分钟。”

“当然会那样，”珠宝商很赞同，“难道你买的时候没看到‘打折 25%’吗？”

301° 说不清

俄克拉荷马会计学校在报纸上打广告，标题是“女会计速成班”。广告打出不久，校长收到一张便条，上面说，“女人是说不清楚的。”[8]（《塔尔萨论坛报》(*Tulsa Tribune*)）

8 广告说“short course in accountancy for women”，那个便条用了另一个形式的名词，就完全变味儿了：“there is no accounting for women”。

302° 金融数学

一个中学数学老师收到一封贷款银行的来信，信中说，“作为教师，你可以通过邮件向我们借贷100到1000美元。”老师回答，“也许我能因为自己是老师而向你们借钱，但因为同样的理由我没有能力还钱。”

303° 灰姑娘的南瓜

一天晚上，哈佛商学院某教授给他6岁的儿子讲了灰姑娘的故事。[9] 小孩儿听得很专心，特别是听爸爸说到南瓜变成金四轮马车的时候，他打断说，“那么，爸爸，灰姑娘是该把它当直接收益，还是可以说它是资本收益呢?”

9 灰姑娘（Cinderella）的故事，最有名的大概是Percault的童话，类似的故事世界各国都有。中国唐代段成式《酉阳杂俎》续集卷一《支诺皋上》有则小女孩叶限的传奇故事，也不妨认为是灰姑娘的来源。

304° 贬值的钞票

我小的时候，10美分算是很多钱了。天哪，怎么1角的硬币就变得不值钱了呢!

305° 拜访科学圣地

两个在意大利旅游的美国物理学家来到著名的比萨斜塔，因为伽利略曾戏剧性地在那儿证明了与亚里士多德的学说相反的事实：从相同高度落下的不同重量的物体同时着地。停车的时候，一个穿着制服的服务员给科学家一张粉红色的票据，收了100里拉。两人后来回到宾馆，问行礼员，“在斜塔那儿停车收的钱是谁得了?”

行礼员显得很疑惑，看了看票，才笑着感叹说，“比萨任何地方都不收停车费。你们交的钱是为了保证塔万一倒下来也不会

砸坏你们的车。”

概率与统计

306° 一幅明白的图景

假设地球上的30亿人“压缩”到一个1000居民的小镇，那么：

1 303个是白人，697个是有色人。

2 60人代表美国，940人代表其他地方。

3 60个美国人占有小镇的一半财富，940人占有另一半。

4 60个美国人的寿命超过70年，而其余940人的寿命低于40年。

5 60个美国人消耗小镇15%的食物，美国人中的最低收入者也比其余940人的平均水平更富有。

6 与其他940人相比，60个美国人要耗费12倍的电，22倍的煤，21倍的石油，50倍的钢铁和50倍的机器设备。

307° *Hydrodamnics*

概率论似乎出现了一个新的分支，大概可以称它为霉运学（hydrodamnics）它研究那些无生命事物的令人讨厌的“惯性”。它也许能为下面的事情找到原因：

1 黄油面包落地，总是抹了油的一面朝下；

2 柚子溅出的汁儿总是喷向人的眼睛；

3 点燃篝火时，风总是吹灭最后一根火柴；

读者很容易找出别的例子来。[10]

10 这种现象后来被总结为“莫菲律”。湖南科学技术出版社即将出版一本专门讨论它的有趣读物，书的原题就是“为什么面包总是抹油的一面朝下”。

308° 统计学家

就是那个马克·吐温，曾把说话支支吾吾的人分成三类：撒谎者，讨厌的撒谎者，统计学家。还有人把统计学家描写为头顶火炉，脚踏冰雪，而嘴里说着“平均说来，我感觉很好。”

309° 一个概率实验

一个聪明人迎来一群牢骚满腹的人，向他讲了一大堆烦恼。聪明人说，“你们每个人都把自己的最大烦恼写在纸上。”接着他把纸条收起来，放进一个罐子。“现在，每个人从罐子里抽一张纸出来。根据概率定律，几乎所有的人都将有一个新的烦恼了。”

大家照着他的建议做了。当他们看了别人的烦恼，都不约而同地恳求宁愿要回自己原来的烦恼。

310° 概率

一个来拉斯维加斯的游客深夜在宾馆被剧烈的肚子疼惊醒，就打了急救电话叫来家庭医生。迅速检查后，大夫收起听诊器说，“我看你百分之八十是得了阑尾炎。”

311° 生命风险

气急败坏的保险检查员对新来的代理训话，“你凭什么为一个 98 岁的老人填写保单?”他责问道。“哦，”代理回答，“我查过人口普查报告，那个年龄的人每年只有极个别死亡。”

312° 统计

据说每四个美国人中就有一个精神失常的。那你想想自己最

亲近的三个朋友，如果他们很正常，那你就是那个失常的人了。

313° 随机选择

一个家伙坚持他的名字就是“七又八分之一块法兰绒布(Flannery)”。他解释说，这个名字是父亲从一顶帽子里捡来的。

314° 风险太大

“我真的很抱歉，马克斯（Max），”概率论老师说，“可是如果我今天原谅你逃课，那么对班上其他老婆生了五胞胎的每个同学，我都只好那样了。”

315° 一个统计学家的自我保护

某个统计学家几乎走遍了全国，四处宣讲他感兴趣的领域。当然，他是坐飞机旅行的，这令他惴惴不安，特别是最近发生了几个在飞机上藏炸弹的事件。为了缓解不安的情绪，他计算了搭乘一架带一枚炸弹的飞机的概率，高兴地发现那概率很小。接着他又计算了搭乘带两枚炸弹的飞机的概率，发现它简直微不足道，才大大松了口气。于是，从此以后，这位统计学家在国内旅行总是随身带一枚炸弹。

代　　数

316° 正负

平常很宽厚的父亲对17岁女儿的不寻常要求却很严厉。女儿感觉最后的结果肯定是“不”，就不再坚持和老爸软磨硬泡。

“这有什么用呢?”她独自生着闷气，“老爸的心情老是正负不定的。”

317° 疑问

一个小男孩儿问，“为什么那么多教堂都把加号刻在上面?”

318°“负负得正”的证明

我从坦桑尼亚的拉费尔（Raphael Mwajombe）那儿得到下面一个绝妙的“负负得正”的证明：

假定有个小城，好人进进出出，坏人也进进出出。显然，好人为正而坏人为负。同样，进来为正，出去为负。另外也很清楚，对小城来说，好人进来为正，好人出去为负；坏人进来为负，坏人出去为正。我们的结果可以清楚地总结如下表：[11]

	进 (+)	出 (-)
好人 (+)	+	−
坏人 (-)	−	+

11 见 Roy Dubisch《数学教师》56 卷第 8 期（1971 年 12 月），750 页。

319° 非结合表达[12]

12 代数的结合律就是 $a(bc)=(ab)c$。

1. He is in the [high (school building)]. （他在高大的学校大楼里）

   He is in the [(high - school) building]. （他在中学的大楼里）

2. They went into the [dark (green house)]. (他们走进黑暗的绿色房子)

   They went into the [(dark green) house]. (他们走进深绿色的房子)

3. They don't know how [good (meat tastes)]. (他们不知道肉的味道有多美)

   They don't know how [(good meat) tastes]. (他们不知道好肉的滋味怎样)

320° "无事生非"

马登（Morris Marden）教授1975年从密尔沃基的威斯康辛大学退休，他曾用40多年的时间研究函数的零点。于是，他长期被戏称为世上"无事生非"的专家。

321° 椰子问题

下面的问题很有名：

"五个水手A，B，C，D，E收获了一大堆椰子，决定第二天早晨平分。他们有一只宠物猴子。A想他应该确保自己那一份儿，就在夜里偷偷起来，把椰子平分为5堆，发现还多余一个，就给了猴子。然后，他把自己的一堆藏起来，把其余4堆合在一起，回去睡觉了。不久，B也醒来，做了和A一样的事情：把椰子平分5堆，多出的一个给猴子，藏起自己的一堆，把其余4堆合在一起，然后回去睡觉。接着，C，D，E也相继醒来做了一样的事情。第二天早晨，他们照原计划分椰子，仍然把它分成5份，但这次没有多余的给猴子了。请问，原来有多少椰子（求最小值）？"

问题在 1926 年激起了很多人的兴趣，因为娱乐作家威廉斯（Bens Ames Williams）在那年 10 月 9 日的那期《星期天晚报》上把问题写进了一个故事。在故事里，一个本来要签合同的人被这个问题弄得心不在焉，结果失去了一桩大生意。

答案：最小值为 3121。如果水手为四个，最小值为 765；三个为 25；两个为 11。（William R. Ranson）

322° 妙解

费米（Enrico Fermi，1901～1954）是第一个原子反应堆的象征，他在 1942 年实现了第一个核链式反应。他还为上面的椰子问题提出过一个绝妙的解答。

−4 显然是问题的一个数学解，因为第一个水手看到 −4 个椰子，拿出一个给猴子，剩下 −5 个，再拿走他自己的，又给下一个水手留下 −4 个。等等。为了得到最小的正数解，我们必须给它加上一个能被 5 整除 5 次的最小正数，即 5^5。因此，问题的答案是

$$5^5-4=3125-4=3121.$$

323° 辅导员的公式

韦伯（Webb）先生是剑桥圣约翰学院的一名很成功的辅导员，他不但是称职的老师，个性也讨人喜欢。他常说，“$pp>jj$”（plodding patience is greater than jumping genius）[13]。他很会挖苦人，常对学生说，“把你知道的写在这张纸上”——给他一张不足一寸的小纸片儿。（L. J. Mordell）

13 踏实的坚韧胜过浮躁的机灵。

324° 公制计量系统

如今代数课程的部分内容是在英国计量与公制计量之间进行

转换。

杜纳金（Dunagin）有幅著名的漫画（发表在1975年9月12日星期五的《班戈每日新闻》），画了一个人热情洋溢地向美国商务部的人员讲话。那人手拿图表和讲稿，强调将英制转换为公制的重要性。他做了一个警告的手势，说，“我想每个人都来考虑公制！记住，一盎司的预防针能抵过一磅的急救药！”

325° 指路

美国第一个公制路标树立在俄亥俄的71号州际公路。于是，首府哥伦布外的那个路标现在成了：“克利夫兰——94英里-151公里”。驾驶人员要进行新路标培训，有望从1983年起在全国推广。（《明日世界》）

326° 韦伊的指数律

韦伊（Andre Weil）发现了科学组织中的一种指数式衰减：“第一流的人指挥第一流的人；第二流的人指挥第四流的人；而第四流的人指挥第八流的人；依此类推。”

几　何

327° 景观规划的第四维

在一块地产的景观规划设计中，土地的长和宽、建筑物的位置、地势的起伏、建筑物的高度、邻近设施的高度和眼下大树的高度，一起构成景观的三维，是规划所必须考虑的。但另外还存在第四维，即时间过程，也是需要考虑的，而且是设计中最重要

的一维，不过在初始设计过程中不会表现出来。

许多景观设计的失败就在于没有认真考虑第四维。例如，树木和灌丛本来随时间变化很快，但在设计中彼此靠得太近，或者距离观光的窗户太近。灌丛只能达到一定的高度，以后会被高大的树木遮蔽。景观建筑师需要付出高度的技巧和想象，才可能让他的设计不但在竣工的时候因为平整的地势、茂盛的草皮和茁壮的树木而显得优美迷人，更重要的是要让它能随时间的流逝而长久地美好下去。实际上，真正好的规划从一开始就引人入胜，而且随着第四维的延伸而增加新的魅力。景观建筑师必须不断问自己，他打开的蓝图在5年后、10年后、20年后会是什么样子。

328° 三分角与化圆为方

1913年～1918年间任威尔逊（Woodrow Wilson）总统内阁财政部长的麦卡杜（William G. McAdoo）声称，“不可能在论战中战胜无知的人。”这句话也同样可以用来说那些三分角和化圆为方的人。关于那些人，哈丁（Garrett Hardin）在他的杰作《自然与人类命运》中说，“人们只要接触三分角和化圆为方的人或永动机的发明者，都可以证明他们真是一群十分怪异的人。值得研究的不是他们提出的方法，而是他们的性格。是什么样的性格缺陷使他们不愿承认他们也许并不能拥有想要的一切呢？不管是什么，都很像娇纵的儿童和赌徒孤注一掷的残缺心智。”

329° 一个强定理

在关于欧几里得平面几何基础的一篇论文里，布鲁克（R. H. Bruck）解释说：

“关联公理对欧几里得平面几乎没有什么要求，所以极少有定

理是靠它们证明的。实际上，主要的定理——我称之为霍尔(Hall)定理——应该这样说：任何讨厌的事情都可以发生。”(穆瑟)

330° 平行还是不平行

有的几何不存在平行线。对这样的几何，我们可以说，“这个几何没有平行线的原因是根本没有引进它们。”

331° 慎用名词

一个几何教授受人之托，把同事的女儿介绍给他的儿子。为了让儿子有所准备，教授先向他描述了女孩儿的模样。等他说完了，儿子对女孩儿也没留下什么印象，就对父亲说，“我想你说过女孩儿的两条腿不一样。”“不要紧的，”教授回答，“我的意思是它们不平行。”

332° 度量

“笑是两个人之间的最短距离。”（伯奇）

333° 火星人的几何

长岛洛克维（Far Rockaway）中学教师舒尔（Harry Schor）说，他在给一班特殊的学生教几何，不得不用“斜边和触角”来证明直角三角形全等。[14]（韦恩）

14 在英文里，直角三角形的直角边叫“leg”，和“腿”是同一个词。假想的火星人没长腿，所以只好说“触角”。

334° 体积

琼斯太太忙着把一幅淡黄色油画挂上她车库的咖啡色纸板墙。邻居史密斯说浅色能让车库显得更大一点儿。“我当然希望那样，”琼斯太太说，“我们还能利用多出来的空间。”

335° 圆

一年级老师要她的学生画一张画说明他们的父亲是做什么的。她发现一个孩子在纸上画了一个圆圈，就问，“你爸爸是做什么的？”

孩子回答，“老师，我爸爸是医生，做巡回医疗。”

336° 可能的误会

在冯·诺伊曼发展的“连续几何”里，点本身是不起作用的。冯·诺伊曼原想为他的几何取另外的名字，但他的同事指出那个名字可能引起误会。冯·诺伊曼设想的名字是“无点几何”。（穆瑟）

337° 椭球体

有那么一个政客，也许可以说他像地球。看吧，他在国会改选中两头都不讨好，遭受了重大的打击，而地球是椭球体——就是说，它和他一样，也是两极平平的。

338° 角

一个爱斯基摩父亲坐在他的圆顶冰屋里给他的小儿子读儿歌。“吹角号的小杰克坐在角落，”父亲才读了一句，孩子就打断他问，“爸爸，什么是角落？”

数学游戏和圣诞卡

339° 阿基米德盒子

流传至今的最古老拼图游戏是著名的“阿基米德盒子”

(Loculus Archimedes)。它用14个几何碎片（11个三角形、2个四边形、1个5边形，如图5上）组装成一个正方形。如果将这些图形做成精巧的薄木块或塑料块，把它们组装在一块浅色底板上（图5下），就成了很好玩儿的礼物。

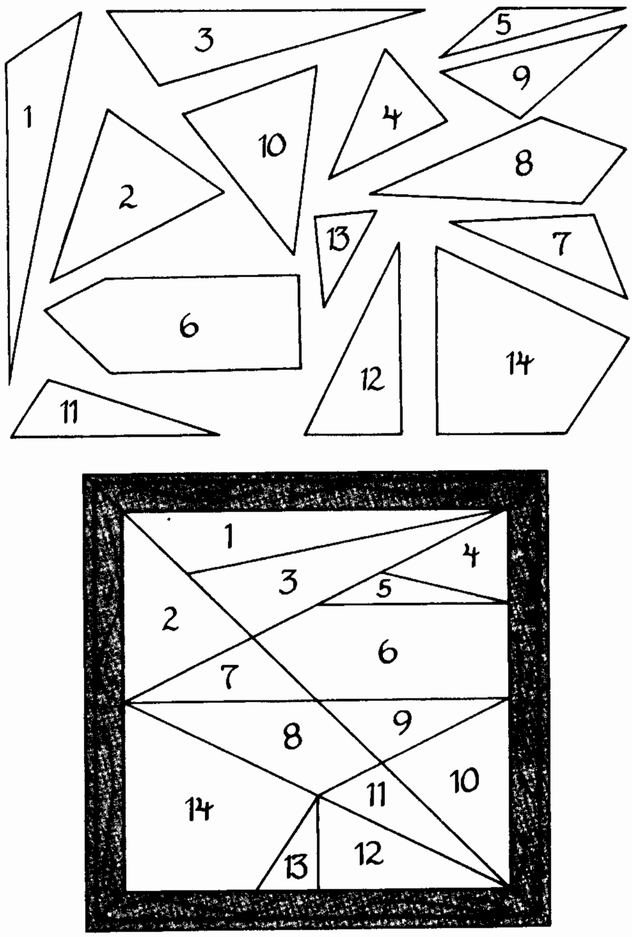


图5

历史学家认为我们不能将这个游戏归功于阿基米德，他们解释说，将它归到阿基米德名下，不过是说它很灵巧。实际上，"阿基米德问题"本来的意思是泛指任何难题。因为不知道拼图的起源，我们也就无从知道为什么会把正方形切割成那样特殊的几何图形。

340° 存放虚数的地方

1976年在学院的时候，我通过邮件收到一个4寸×4寸×4.5寸的小方盒子。盒子做得很漂亮，带着铜扣和一对铜链。解开铜扣，才发现盒子里没东西，只有两块铰合在一起的木片，一块3/4寸厚，一块1.5寸厚。上下两块木片之间有张小纸片，上面写着一首小诗：

> 找一个地方来存放虚数，
> 我没见过有什么工具。
> 尽管盒子不太复杂，
> 我想已经可以满足。

盒子是我从前的一个好学生送我的一件好玩儿礼物，他那时是个优秀的助教，现在是权威的老师，也是我永远的好朋友，梅里尔(Carroll F. Merrill)。

341° 三角形圣诞卡

特里格（Charles W. Trigg）在洛杉矶城市学院做训导主任时，设计制作了别开生面的几何圣诞卡（图6），寄给他的朋友和学院的同事。把三角形边上的圆形部分恰当地折叠到背后，卡片就成了图7的样子。

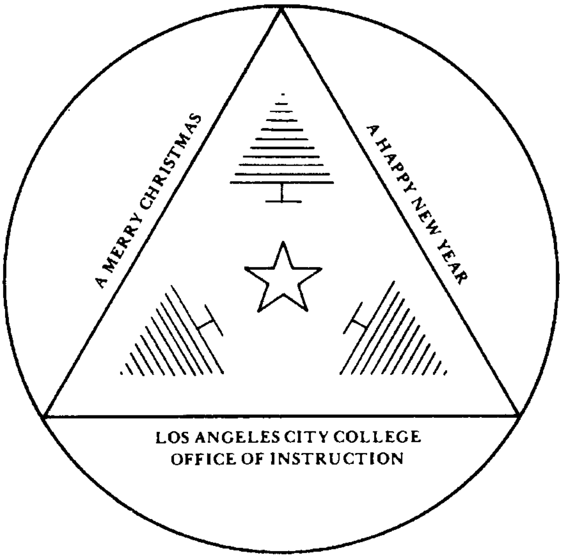


图 6

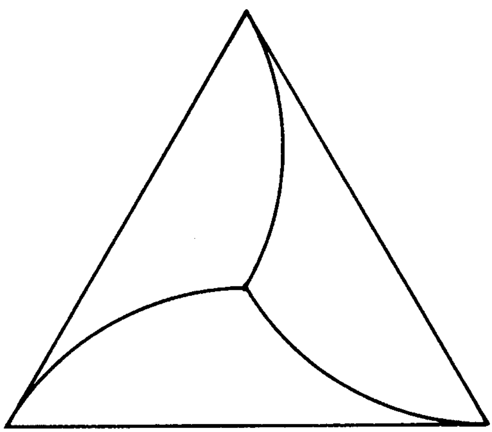


图 7

342° 牟比乌斯带圣诞卡

几年前，纽约布法罗的沃克（George W. Walker）牧师写了一首诗，可以无限循环地读下去。就是说，读完前六行，就会回

到第一行，然后一遍又一遍地重复：

> 真爱和友谊是上帝赐予的礼物，我们说
> 那上帝的礼物持久永恒，就像这首小诗，
> 随便从哪儿读起，你会看到
> 它是一根没有终结的链条，令人想起
> 我们从新年的第一天拥有崭新的开始，然后看着
> 那年年月月不停地流逝，一样的情形，在我看来，
> …… ……

然后，牧师拿一条细长的纸带，沿中线依次写出前三行（图8）。

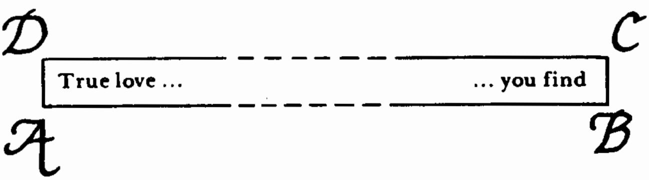


图8

接着，把纸带翻转过来，沿中线在背面写出其余三行（图9）。

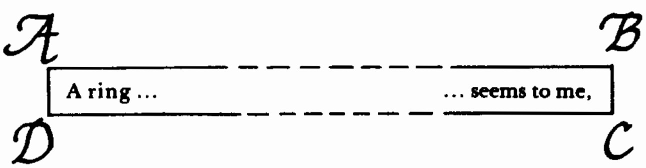


图9

然后将纸带扭转半圈，将两端粘结起来，就做成一条写着无限循环的诗句的牟比乌斯带。牟比乌斯带很容易折叠，装进信封（图10），牧师就可以把这不同寻常的圣诞卡寄给朋友们了。

这样的牟比乌斯带可以写上任意无限循环的诗句或散文，例如下面这个有名的循环故事：

> 那是一个风雨大作的黑夜，我们都围坐在篝火旁抽烟，

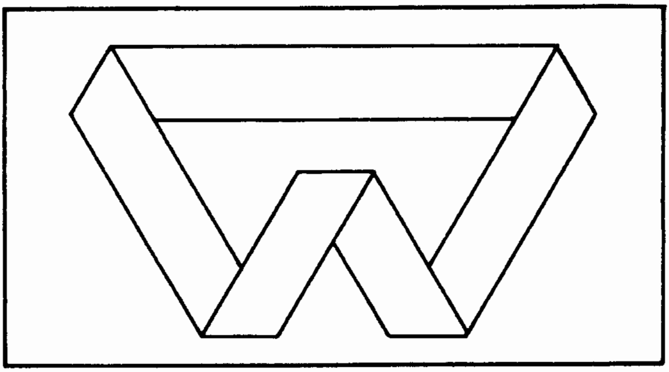


图 10

这时有人说，“船长，讲个故事吧。”于是船长开始说了：

343° 又一张数学圣诞卡

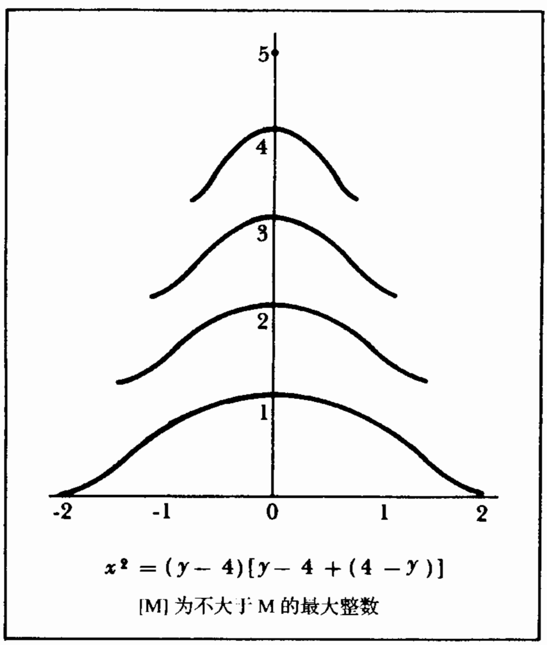


图 11

若干年前，俄克拉荷马大学的安德里（Richard V. Andree）教授和夫人约瑟芬（Josephine P. Andree）给朋友们寄了也许最为别出心裁的圣诞卡，画的是一个方程的曲线。图 11 是卡的正面。卡原来是双色的，红色的坐标轴，蓝色的曲线和数字。

344° 数学学生的新年问候

人们编了许多数学表达式，以某种方式展开或计算时，能得到大家熟悉的新年问候。例如，安德里教授设计了如下的公式：

$$\begin{vmatrix} M & R^2 \\ -Y & \ln^{-1} 1 \end{vmatrix} + XW$$

在这里，我们应该看到，用物理学的惯用符号，

$W = F \cdot S$ 和 $F = MA$

多年前，我在西弗吉尼亚教书，上我微积分课的一个学生韦芙（Bertha Weaver）小姐设计了一个问题：

给定

$$y = (x + M/2)^2 - (E - x)^2/2 + (9y - 6)/3 + 2Rx + \int y dx + (14 - 6y)/2 + x^2 M/2 - (2A - x)^2/4 + x(S - x/4)$$

根据隐函数微分求 dy/dx。[15]

15 结果是 $dy/dx = M + E + 2R + y + xM + A + S$，将右边的字母连起来即为 Merry Xmas（= Christmas）。另外，在上面的行列式中，$\ln^{-1} 1 = e$（自然对数的底），展开后也是一样的。

345° 节日问候

特里格教授在洛杉矶城市学院时提出了如下的问题（《美国数学月刊》问题 E1241，1956 年）：

> 节日问候“MERRY XMAS TO ALL”是一个数字谜，每个字母代表惟一的数字，而每个词是一个平方数。求所

有解。

结果只有两个解：

27556 3249 81 400 和 34225 7396 81 900

罗森菲尔德（Azriel Rosenfeld）发现，如果加一个条件，要求每个词的数字之和是一个完全平方数，则解是惟一的。[16]卡斯特（Edgar Karst）发现，同一句问候的方程 *MERRY* + *XMAS* = *TOALL* 也是一个数字谜。其中每个字母代表惟一的数字，而每个词能被 3 整除。这时有惟一解：84771 + 5862 = 90633。

16 只有第二个解满足这个条件。

346° 藏在字母里的数学家

1952 年 12 月的《美国数学月刊》刊登了娱乐问题 E1041：

> 字母重排的游戏在今天当然还没有消失，下面的短语隐藏着 4 个著名的数学家：（1） A DONUT SHIP （2） SHE IS A NUT （3） SEWER STAIRS （4） FIRE ON SUB.

答案发表在 1953 年 6～7 月的《月刊》，他们是：（1） DIOPHANTUS （2） STEINHAUS （3） WEIERSTRASS （4） FROBENIUS。解题者们还提出了许多独创的字谜。例如，特里格为上面四个数学家提出了不同的字谜：（1） THUDS PIANO，I PUT SHAD ON；（2） USES A HINT，TIN HAS USE，SHUNS A TIE，THE USA SIN；（3） WATERS RISE，SWEARS RITES；（4） I BURN FOES，FIE ON BURS，O FINE RUBS。

特里格、切森（Paul L. Chessin）和古尔德（H. W. Gould）还为其他数学家编了字谜，下面是一些例子：

WENT ON	NEWTON
ROTTED HUN	TODHUNTER
REC'D ROE	RECORDE
IV TENS	STEVIN
KIND DEED	DEDEKIND
SEE GUARDS	DESARGUES
PELT ONCE	PONCELET
LIE CRUEL APE	PEAUCELLIER
BAN ON RICH	BRIANCHON
A FREE BUCH	FEUERBACH
RICH CASE	SACCHERI
RAM NINE	RIEMANN
SING A TUNE, MOOR	REGIOMONTANUS
I REMOVED	DE MOIVRE
MAR CONE	CREMONA
DEER GLEN	LEGENDRE
CALL APE	LAPLACE
I RIVAL ACE	CAVALIERI
SET CEDARS	DESCARTES
TIRE CHILD	DIRICHLET
HARM A DAD	HADAMARD
I CHARM ALEC	CHARMICHAEL
A CURT NO	COURANT
LEAN MUSE	MENELAUS
REACH DIMES	ARCHIMEDES
ONE LIME	LEMOINE
NO GEM	MONGE
OR AN EPIC	POINCARE
AS SHE	HASSE
HERE TIM	HERMITE
WENT ON	NEWTON
REGAL NAG	LAGRANGE
NICE CORPUS	COPERNICUS
LAMED BERT	D'ALEMBERT
A CRITIC	RICCATI
ON ETHER	NOETHER

A PINER	NAPIER
RECIPE	PEIRCE
ABLE	ABEL
BRED IN US	BURNSIDE
I LAG SO	GALOIS
READ CHIMES	ARCHIMEDES
AM SURE NOT GO IN	REGIOMONTANUS
CABIN FOCI	FIBONACCI
RUN A CLAIM	MACLAURIN

1953 年 7 月 20 日，“全国谜题同盟（NPL）公司”（1883 年 7 月 4 日成立的一个团体）秘书冯·伯克曼（Henriette von Boeckmann）给《美国数学月刊》问题专栏编辑写了如下一封信：

伊弗斯博士：

1953 年 7 月 3～5 日，全国谜题同盟在纽约斯特勒宾馆聚会。在这次事务性的会上，一个订阅《美国数学月刊》的会员使与会者注意到，贵刊 6～7 月号在问题专栏刊登了几个“字母重排”的字谜（Anagram）。

问题“重排了”四个著名数学家的名字，但根据 N. P. L. 的标准，它们只不过交换了字母的次序。确实，字典定义的 Anagram 就是将一个单词或短语的字母重新排列构成新的单词或短语，但 N. P. L. 限制了它的含义，重排的词语必须与原来的词语有一定的关系。下面是我们提出的几个样本：

One smart hat – Tam O'Shanter（一顶漂亮的帽子——苏格兰圆帽）

So I sit and sip – Dissipations（于是我坐下喝酒——狂饮）

It's slam bang – Lambastings（砰然一声——打击）

Is “anti” in “spare child” – The disciplinarians（“原谅孩子”里有“反对者”吗？——守纪律的人）

N. P. L. 还认同那些意思相反的重排单词。

你可以看到，恰当地重排一个名字是极其困难的；一般的结果只是改变字母的顺序。

这封信算不得批评，只是想把这样的智力活动保持在较高的水平上。大会通过主席要求秘书向你转达本同盟的“重排词”概念,很多人认为那是这种字谜中的最高级艺术。

你忠实的

冯·伯克曼

N. P. L. 秘书

根据谜题同盟的观点，也许只有 Went on（Newton），Kind deed（Dedekind）和 Able（Abel）算是真正的重排字谜，而 No Gem（Monge）和 I Lag so（Galois）可以认为是反义的字谜。[17]有趣的是，德摩根早就发现了这儿的第一个真正的重排字谜（见《走进数学圈》198）。

17 这样有意思关联的字谜大概相就当于我们的歇后语了：前进的牛顿；宽厚的戴德金；能干的阿贝尔；讨厌的蒙日；迟钝的伽罗瓦（后两个当然应该算是“反义的”）。

最后我们看看特里格发现的惟一一个回文的数学家字谜：AVEC – CEVA。

347°“给我看”

20 世纪 70 年代中期，“给我看”像瘟疫似的在美国的数学人群中流行。很多数学团体也一下子染上了这种病。它来势汹汹，但去得也快。病情最严重时，它能感染众多的数学刊物。正如大家所料，染病最重的是特里格，因为那病似乎专门感染数学专业里最热情、最敏捷的人。在狂热的病态下，特里格提出了很

多“给我看”的问题，下面只不过是其中的几个例子：

给我看一个没用的指数，我给你看另一个（one）。

给我看几个双手被捆在宾馆地板上的抗议者，我给你看一个连通集合（connected set）。

给我看一个用手指数数的人，我给你看一台数字计算机（digital computer）。

给我看怎样分解 6，我也给你看怎样分解 2（do it to two，too）。

给我看一个能说会道的推销员，我给你看一条直线（a line）。

给我看一个没有收入的漂泊的小孩儿，我给看你一个因变量。

给我找一个北欧人、非洲人和中国人大致一样多的团体，我给你看一个四色问题。

给我看一棵不凋零的枫树，我给你看几个复根。

给我看一个生日会，我给你看一个调和函数（harmonic function）。

给我看一个掉了三颗前牙的小孩儿，我给你看一个三维空间（three space）。

另一个患病的数学同胞是彭斯（Fred Pence），他提出了下面的“给我看”：

给我看一辆卷入车祸的小汽车，我给你看一个矩形（rectangle）。

给我看弗雷泽（Joe Frazier）和阿里（Muhammad Ali），

我给你看两个老对头（ex opponents）。

给我看6，5，6的平方，我给你看几个有趣的数字。

给我看一条带着海草的美人鱼，我给你看一件海藻的胸衣（algae bra）。[18]

类似的病毒也多次在数学世界扩散——例如，他们可能忘了"Tom Swiftie"狂热，但它的痕迹至今还留在数学的某些角落。[19]其实，不论哪个有心人，都很容易把历史上的这些数学瘟疫事件汇集成一本有趣的小册子。很难说像亚洲流感那样的瘟疫会不会重新肆虐数学界，我们也不知道将来会不会流行什么新的病毒。

348° 富兰克林的半幻方

在《相约数学圈》里我们用了一个单元来讲幻方，现在我们再来谈谈这个愉快的话题，对幻方陌生的读者可以从前面的故事（S30）里熟悉几个常用名词的意思。

富兰克林喜欢构造具有"对角折线"性质的半幻方（见《走进数学圈》317）。图12A是一个8×8富兰克林半幻方——每行和每列的数字之和等于260（遗憾的是两个主对角线不满足这个条件，所以它只是半幻方）。不过，图12B所示的5条对角折线的数字之和也分别都是260，而且，从幻方的顶边、右边和左边出发，也各有5条这样的对角折线，其数字之和都是260。另外，图12C，D，E和F所示的8个正方形的数字之和是260。图12G的虚线指示的8个正方形和实线指示的8个正方形的数字之和也是260。图12H和I中的虚线和实线的正方形也有相同的结论。这样，我们一共有了46个数字和为260的正方形。最后，原来那个幻方的每个四分之一都是幻数为130的4×4半幻方。

18 这些无聊的句子都带有一个数学名词，靠同音或多义使原句听起来有关联（中文就显得没那么有趣了）。例如，1是没用的指数；digital也有"手指"的意思；to too与two同音，三个two正好分解6；line与lying同音，等于说推销员不过是在撒谎；function也有集会、典礼的意思。Rectangle读音同wrecked tangle，一团糟；ex-opponent同exponent，指数；algae bra当然在说algebra，代数。

19 "汤姆斯威夫特"（Tom Swiftie）是利用引语的双关语效果来制造幽默，是根据一个科幻小说人物的名字命名的。最简单的一个例子是，"It's a joke!" Tom said swiftly.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

A

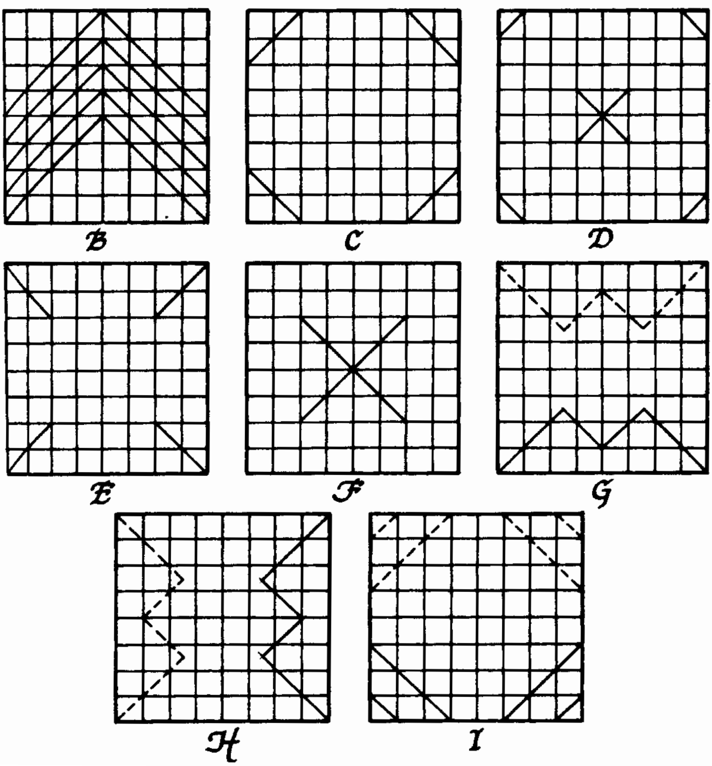


图 12A－I

349° 弗莱尔森博士的全对角富兰克林方

富兰克林方是对角折线的数字和等于幻数的幻方或半幻方。刚才的富兰克林方是一个半幻方，而且很长时间也没人做出一个富兰克林幻方。在富兰克林引入他的半幻方100多年后，弗莱尔森（Frierson）博士构造了如图13的8×8富兰克林方，而且是一个全对角幻方（就是说，除了行列外，对角线和对角折线的数字之和也都相等）。弗莱尔森幻方还具有图12B，C，D，E，F，G的性质。而且，它的每个四分之一也都是全对角幻方。

64	57	4	5	56	49	12	13
3	6	63	58	11	14	55	50
61	60	1	8	53	52	9	16
2	7	62	59	10	15	54	51
48	41	20	21	40	33	28	29
19	22	47	42	27	30	39	34
45	44	17	24	37	36	25	32
18	23	46	43	26	31	38	35

图13

350° 回形幻方

4	9	8	47	48	49	10
38	19	20	17	34	35	12
39	37	26	27	22	13	11
43	36	21	25	29	14	7
6	18	28	23	24	32	44
5	15	30	33	16	31	45
40	41	42	3	2	1	46

图14

图 14 是一个 7 阶幻方，它包括两个同心的 5 阶和 3 阶幻方。

351° IXOHOXI

图 15 不论正看、倒看还是从镜子里看，都是幻数为 19998 的幻方。因为显然的理由，这个幻方叫 IXOHOXI（读 iks-o-hox-e）[20]。

20 这几个字母也满足同样的对称性质。

8818	1111	8188	1881
8181	1888	8811	1118
1811	8118	1181	8888
1188	8881	1818	8111

图 15

杂 谈

352° “水上人家”

在《重游数学圈》里（R270）讲过卡宾和积分 d（*Cabin*）/（*Cabin*），如果忽略积分常数，其结果是“log*Cabin*”。有趣的是，如果不忽略积分常数，结果就成了“水上人家”（*houseboat*）——log*Cabin* + *C*。[21]（Michael R. Vitale）

21 Cabin 是船舱，log 是圆木。

353° 谢尔顿与无穷

阿尔伯达大学的谢尔顿（C. Sheldon）喜欢谈无穷。他似乎一直在看守它。快下课时，他总爱在黑板上画一条水平直线，从黑板延伸到墙壁和门口，然后打开门，走出教室，一直画到他的

办公室。第二天，他两手端着回到教室，对大家宣布说，“我找到它了！就在这儿呢！我终于抓住无穷大了！”然后，他站在打开的窗户前，慢慢张开手，“噢，噢，”他喊道，“它走出窗户了，走了！消失了！”

有一次，在这样的时候，一个上学年考试不及格的同学——他对谢尔顿的表演已经见惯不惊了——跳了起来，从口袋里掏出一把玩具手枪，对着窗外打了一枪。

学校修新图书馆时，掘土机挖出的泥土堆成一座小山。有的同学在土堆顶上竖起一个标志，上面写着：“谢尔顿峰：从此能望无穷”。（穆瑟）

354° 普林斯顿研究院的真正创立者

哈佛政治经济学家凯森（Carl Kaysen）继奥本海默（J. Robert Oppenheimer）后任普林斯顿高等研究院院长，他有一次说，“尽管正史没有记录，但高等研究院的真正创立者是弗勒克斯纳（Abraham Flexner）和希特勒。”[22]

22 弗勒克斯纳当然是创立者，但如果没有希特勒的战争和对犹太人的迫害，大概也不会有那么多伟大的科学家跑到普林斯顿的那个小村庄去。

355° 建议

数学老师对一个焦虑的同学说，“如果你不想让父母看到你的成绩，你就在姓名之间留个空白，我把成绩等级填在那儿，就当是你教名的第一个字母。”

356° 孤独的职业

植物学家很容易对其他行当的人大谈他有趣的工作。地质学家、物理学家、生物学家、历史学家、艺术家、音乐家、经济学家、哲学家、作家、天文学家等等，也都能这样。但是，数学家

如果想和一个不是数学家的人谈数学，那可就太难了。于是数学成了孤独的职业，数学家得远涉重洋去参加数学家们的集会。越是深奥的数学，越难找到谈话的对象。例如，大学里的某个数学家，如果碰巧是同事中惟一的一个数理逻辑学家，他会觉得更加孤独。他们讲了一个故事：某拓扑学家远行 4000 千米去见另一个拓扑学家，向他讲自己做过的一些拓扑学研究。当他见到那个人时，他就开门见山地大谈他的工作。那个拓扑学家似乎不太明白他讲的，最后打断他说，“噢，我明白了，你是组合拓扑学家；而你知道，我是微分拓扑学家。”这样，两人谁也不能再谈各自做的事情了。常有那样的事情：一个数学家在发现一个特别迷人的定理的证明后，却找不到一个可以听他讲解的人。

357° 道听途说

（a）“我妻子不理解我。我是一个代数拓扑学家。”

（b）对一个沮丧的数学教授的评论：“他是那个精神病医生的第一个失败的学生。”

（c）一个数学教授的假眼丢了，叹气道，“我想我又失去了另一个学生。”

358° 标题新闻

某报纸的标题新闻：失业的数学老师没课了。

359° 观点

为了证明不同观点的人的意见会产生多么大的分歧，考虑下面的例子：一个年轻的罗马学生卡西乌斯（Cassius）给老师布鲁塔斯（Brutus）提出如下的算术问题：

$$XI + I = X$$

以老师的观点看，这当然是错的。但把纸倒过来，也就是从学生的观点看，它是正确的。

360° 标点问题

在一本被大家遗忘了的写于本世纪初的小说里，有一件发生在教室的故事：

> “在一英寸宽一又四分之一英寸长的矩形里有多少个边长四分之一英寸的正方形?”法兹雷顿先生问他的同学。斯科特立刻举起手来，小孩儿已经忍不住了，激动地大声喊道，“20!”

可以证明，20! 个边长四分之一英寸的正方形足够填满整个美国。

补遗

从艾宾豪斯错觉到模棱两可的图像

几何错觉

好的几何错觉机智而可乐，可以当成图画的数学笑话和故事。实际上，好的几何错觉是对某个有趣几何事实的浓缩的图解，可以认为是一种特殊形式的数学轶事。因此，理所当然应该在我们的数学故事集里包括一些几何错觉。

一般说来，解释一个笑话或故事是吃力不讨好的事情，我们在这儿也不想对几何错觉做过多解释——只是将它们呈现出来。至于为什么眼睛有时会欺骗自己，请读者参阅拉凯什（M. Luckiesh）的那本精彩的《光学错觉》（Dover 出版公司 1965 年重印）。

我对几何错觉的热情和搜罗，就是多年前从拉凯什的那本有趣的书开始的。我曾希望把我收集到的数学激发的艺术作品汇编成一本书（从《相约数学圈》可见其一斑），同样，我也希望有一天能把我收集的几何错觉汇编成书。这儿只是其中的少数——都很简单，而且都与“圈”有关。

在欣赏这些错觉的图形时，应该记住，有的图也许能欺骗某些人的眼睛，却未必能欺骗另一些人的眼睛。

我们在前四次数学圈的周游中（《走进数学圈》、《重游数学圈》、《相约数学圈》和《告别数学圈》），一共讲了 4（360）= 1440 个数学故事和传说，另加《相约数学圈》的 9 个补遗。所以，下面的故事从 1450 开始。

平面错觉

1450° 艾宾豪斯错觉

这是平面错觉的一个突出例子。如图 16，尽管两个图的中心圆相等，小圆包围的圆却显得比大圆包围的圆更大。[1]

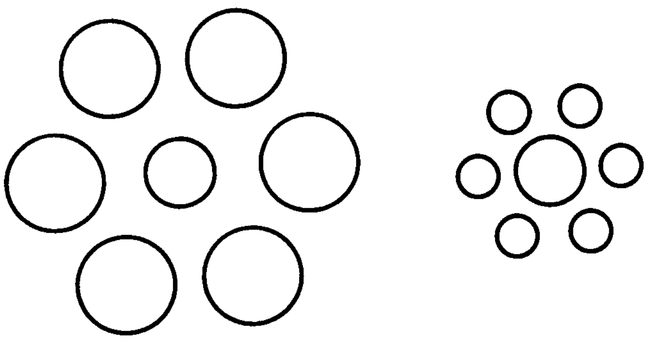
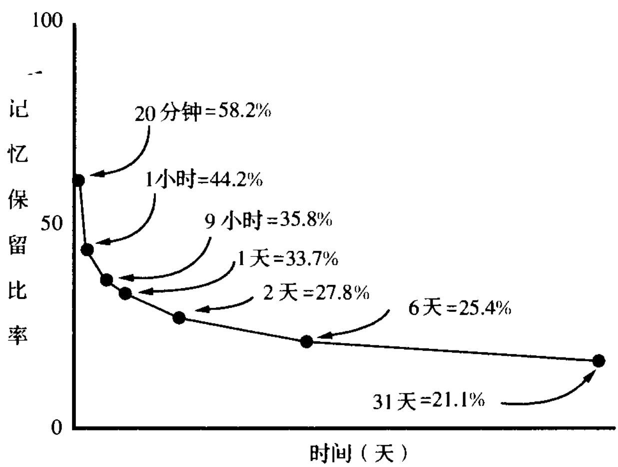


图 16



艾宾豪斯遗忘曲线

1 艾宾豪斯（Hermann Ebbinghaus，1850～1909）是德国实验心理学家，第一个用实验研究人类记忆。

1451° 一般原则

更一般化的艾宾豪斯错觉说的是，两个相等的图形，一个邻接延展小的图形，一个邻接延展大的图形，那么前者显得比后者更大。于是，在图 17 中，尽管两个中心圆相等，但左边的看起来比右边的小。同样，在图 18 中，尽管两个圆相等，左边的看起来比右边的大。

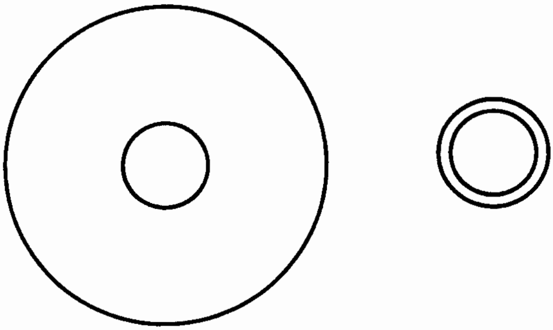


图 17

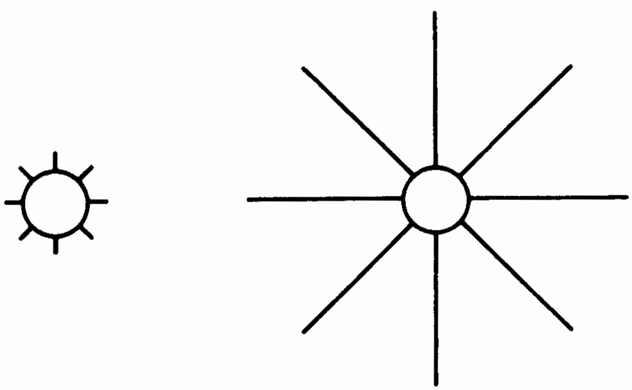
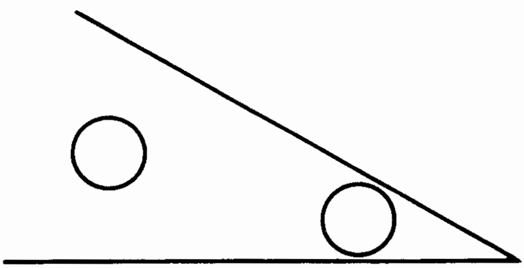


图 18

1452° 升起的月亮

也许每个人都在某个时候发现，太阳或满月在接近地平线时显得比在空中大很多。这也只是一个错觉，那是因为，当太阳或满月接近地平线时，如果谁用小口径的圆筒来看，那他会发现太阳或月亮立刻就缩小了，和在头顶看到的一样大。为了说明这种错觉，人们提出了很多解释，其中一个的基本意思如图 19 所示，近角的圆显得比另一个更大，而两个圆其实是一样大的。

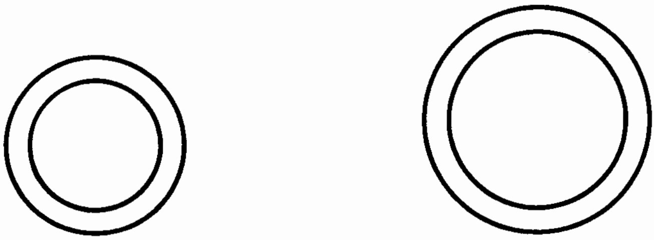
图 19



1453° 内外扩张

一般说来，两个相等的凸形，如果一个在内部包含某个图形，而一个被包含在某个图形的内部，那么被包含的图显得更大。图 20 说明了这种错觉，右边的内圆显得比左边的外圆更大，

图 20



尽管它们实际是一样大的。图 21 更突出了这种错觉，两个本来相等的圆，左边的显得比右边的更大。

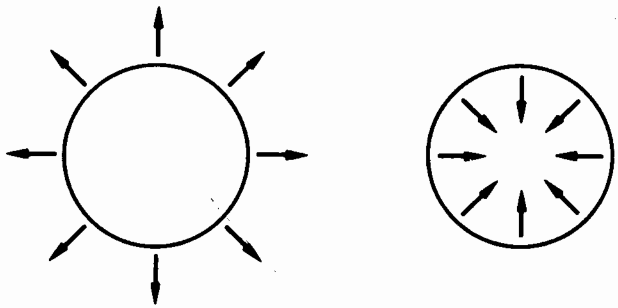


图 21

1454° 圆的一个性质

如果在同一张纸上画相同面积的圆和两个正多边形，那么等边三角形将显得具有最大的面积，而圆的面积最小（如图 22）。这种错觉的原因也许是在于这样的事实：在我们所有的等多边形里，等边三角形具有最大的周长，而圆的周长最短。

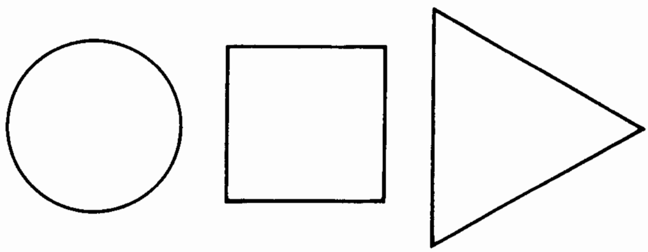


图 22

1455° 判断失误

比较两个图形的面积，有时仅仅因为它们的相对位置不同，就会产生不同的判断。例如，图 23 的两个图形虽然是全等的，但下面的似乎比上面的显得要大一点儿。而另一方面，如图 24

的两个全等图形，上面的显得比下面的更大。

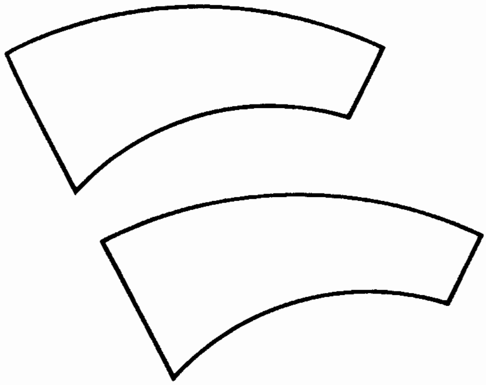


图 23

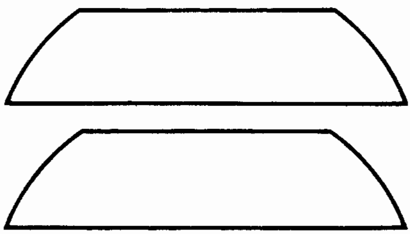


图 24

1456° 透视

有些显著的错觉是透视产生的，例如汇聚的直线。本卷扉页的图是一个常见的例子，两个相等的“球”在正常的眼睛看来并不相等。

线形错觉

1457° 三圆

在图 25 中，左边两圆的内边缘之间的距离其实等于右边两

圆的外边缘间的距离。

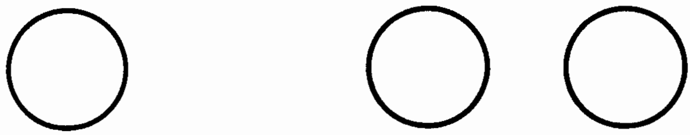


图 25

1458° 重放的三圆

在多数人看来，画在纸上的水平线段显得比同样长度的垂直线段更短。根据这个事实，上一个错觉可以强化为图 26 的样子：竖直排列的两个圆的内边缘间的距离其实等于水平放置的两个圆的外边缘间的距离。

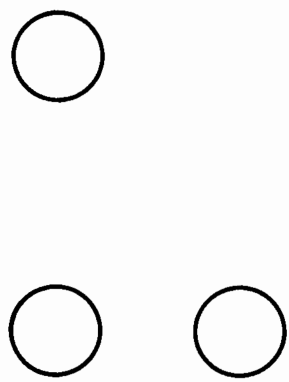


图 26

1459° 鲍德温（Baldwin）错觉

在图 27 中，杠杆支点处于连接两圆的线段中心。尽管错觉不像其他情形那样显著，但多数人还是觉得支点更靠近大圆。

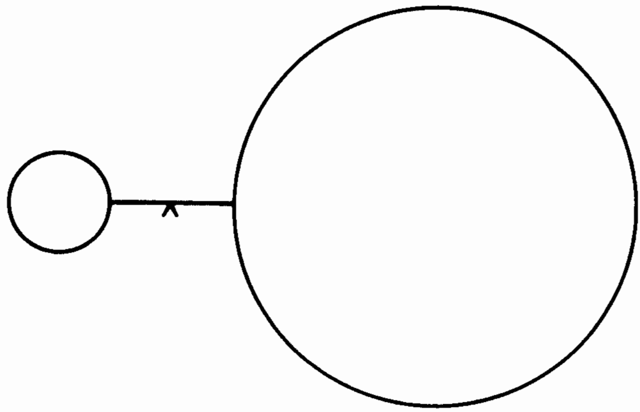


图 27

变　形

1460° 间断的圆周

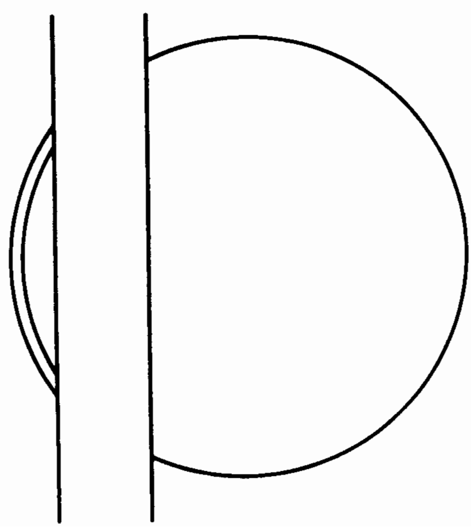


图 28

多数人觉得，在图 28 中垂线左边的外圆弧是右边的圆的延伸，其实应该是内圆弧。

1461° 半圆

两个相等的半圆弧，一个带直径，一个没有（图 29），前者一般显得比后者更小、更扁。

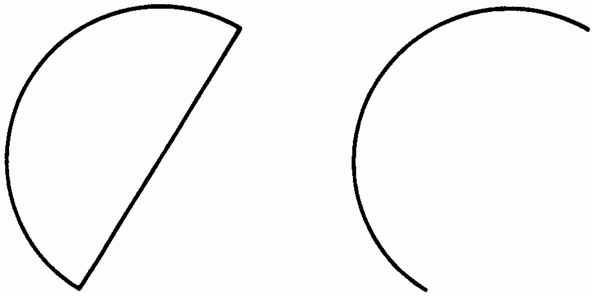


图 29

1462° 另一个间断的圆周

在图 30 中，同一个圆周断开的短弧似乎比长弧有更大的曲率半径。

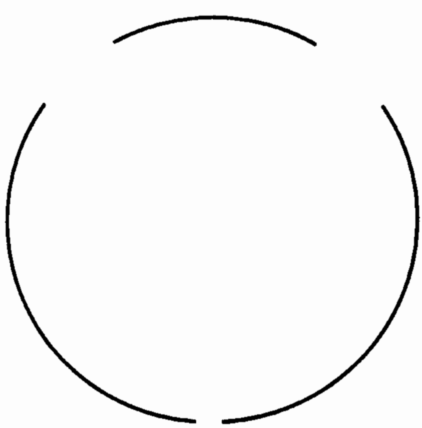


图 30

1463° 收缩的圆周

在多数眼睛看来，圆的内接多边形好像在顶点处扭曲或压缩圆周。图 31 说明，外接圆在多边形的顶点显得向内收缩了。同样，六边形的边在内切圆的切点处也仿佛向内凹陷了。

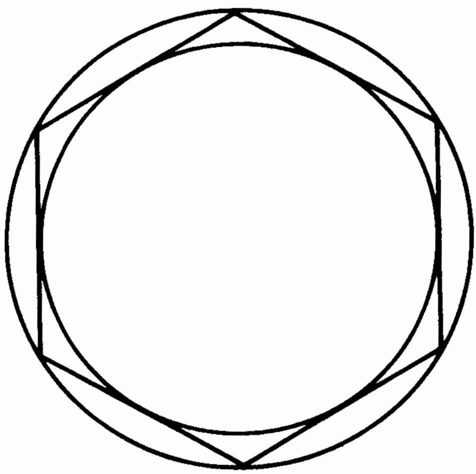


图 31

1464° 凹陷的直线

图 32 中，水平线段上的圆弧好像使线段的中间部分向下凹陷了。

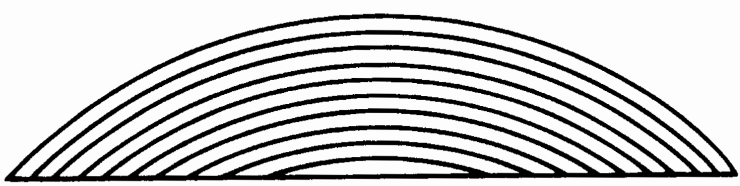


图 32

1465° 隆起的直线

将图 32 的圆弧放在线段下面，如图 33，则水平线段的中间

部分似乎向上隆起了。

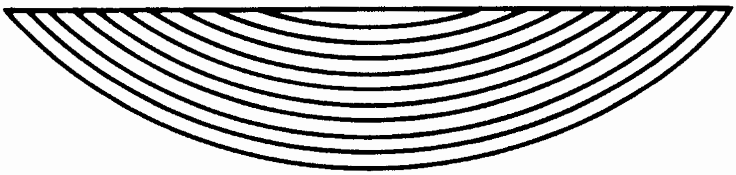


图 33

1466° 真圆吗?

图 34 显著地说明,一个圆在适当的背景下会产生多大的变形。图中的封闭曲线的确是一个圆。

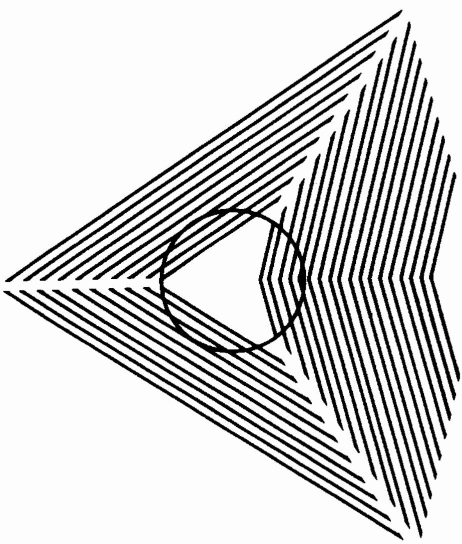


图 34

1467° 模棱两可的图形

所谓的模棱两可的图形产生了许多几何错觉。就是说,因为观察者的注意力和联想随时改变,图形也仿佛不停地变化。例如,很多人都见过著名的施罗伊德(Schröder)的反转楼梯,希

尔里（Thiéry）的反转灯罩，马赫（Mach）的“打开的书”或可以翻转的立方体。同样，凹雕有时看起来像浮雕，而浮雕有时看起来像凹雕。图 35 画了一个简单例子，是一组圆环构成的模棱两可的图形：“婀娜”的线条是在向左退行还是在向右退行？埃舍尔（Maurits C. Escher）的许多炫目的图画，为了达到效果，也依赖于嵌入的模棱两可的图形。

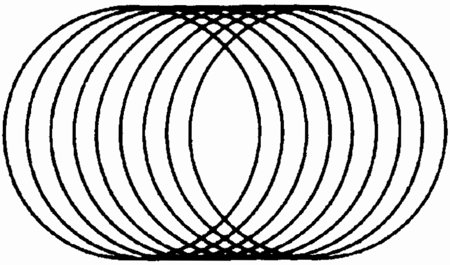
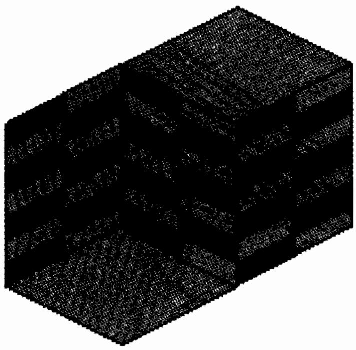
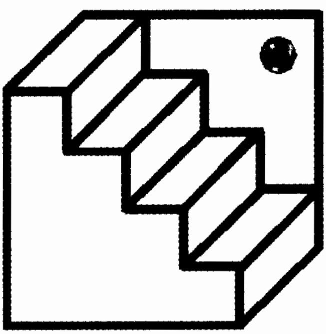


图 35



希尔里的反转灯罩



施罗伊德的楼梯错觉

回归数学圈



诺丁汉的格林磨坊，见 R14。

前 言

柯南道尔当然喜欢写他的福尔摩斯，可当他发现还有“更严肃的”事情时，还是明智地把他钟爱的侦探放在一边。于是，在《福尔摩斯回忆录》的《最后一案》里，他让人们相信大侦探与最大的敌人莫里亚蒂教授在决斗中从瑞士的莱辛巴赫大瀑布的悬崖上摔死了。可是，因为这个懦夫般的举动，柯南道尔招来了读者们的一片抱怨。多年后，他不得不让大侦探复活，写了《福尔摩斯归来》。

因为几乎同样的理由，我现在也回归数学圈，再经历一次悠闲的旅行。大约 10 年前，我曾决定摆脱数学圈，和它永远告别；就在这些年里，我收到了大量的来信，声讨我的脱逃。我希望现在的行动能给他们一点安抚。同时我想起，出版者甚至请求我把那本《告别数学圈》(Adieu)的标题改为《暂别数学圈》(au Revoir)。

那么，我的好朋友们，就让我们再漫步一圈吧。感谢所有给我寄来故事的人们。我希望没有因为疏忽而忘记他们的名字。但愿《回归数学圈》能和前面的几圈一样，对

所有年级的数学老师都能发挥一点作用。

霍华德·伊弗斯

致　谢

感谢以下杂志慷慨允许我复制他们的材料：

《美国数学月刊》、《娱乐数学杂志》、《数学杂志》和《二年制学院数学杂志》（现为《大学数学杂志》）。当然，我还要感谢在故事中引述过的那些作者。

第一象限

从牛顿的床

到通用语言

几个数学人的故事

1° 牛顿的床

牛顿小时候睡过的床，在任何数学博物馆里当然算得上一件珍贵的藏品。那床至今还在，藏在一个非常奇怪的地方。

1948 年，以股市秘诀闻名的巴布森（Roger Babson）创立了引力研究基金会。虽然基金会支持任何与引力有关的研究，但主要感兴趣的还是寻找某种“引力屏蔽物”——某种能隔绝引力作用的物质，就像隔断光线的金属片。[1]

基金会的多数研究都很可笑。例如，它费了几年的时间来收集精神病患者受月相影响的资料，因为太阳和月亮的引力作用可能对大脑和脊髓液产生某种干扰。基金会给各地警察局长发出数百封信，目的是询问他们是否在满月的日子接到了更多的报警电话。它还联系了保险公司，想知道事故率是否和月相有关。基金会还研究引力和身体姿态。它主张最好是在体重减轻的时候登山；而祈祷时最好鞠躬，那样可以改变引力对大脑的作用方向。因为相信引力对空气流通大有帮助，基金会建议，为了让引力净化空气，所有建筑物的地板都应该倾斜，在低矮处留通气口，这样，污浊的空气就会像雨水从倾斜的屋顶流下那样从气孔出去。基金会还真的在新波士顿建了一间房子，所有地板都有半英寸的倾斜。基金会讨论过引力对农作物、商业和政治选举的影响。他们为促进血液循环设计了专门的引力座椅，还卖一种叫普利斯科伦（Priscolene）的专利药品，据说是能帮助血液循环的抗引力药丸。

1 据说，这是大发明家爱迪生的建议，“切记，巴布森，你对根本不存在的东西当然一无所知。你必须找到某种能够摆脱地心引力的东西。我想它将是某种合金。”不过，基金会的机制还是很符合科研精神的，它的一则公告说，“希望新波士顿成为物理学家、工程师、冶金学家和其他对引力的各种作用特别感兴趣的人们夏日聚会的‘圣地’。”（参见 Martin Gadner, *Fads and Fallacies in the Name of Science*, Dover Publications, 2nd edition, June 1, 1957。）

1951 年秋，基金会在新波士顿召开了第一次会议。会上展出了牛顿睡过的床，那是基金会为了表示对那位万有引力发现者的崇敬而花钱买来的。巴布森的夫人成了世界上收藏牛顿著作和有关牛顿的著作最多的人。

2° 柏拉图的影子树

据说，佛陀当年坐在下面冥思的那棵菩提树，至今还茁壮挺拔在印度的土地上，不过它的真实性还存在怀疑；人们更确定的是，柏拉图站在荫凉下给学生讲课的那棵影子树依然存在着。

虽然柏拉图本人不是数学家，但他欣赏数学，而且在他的著名学院培养了很多数学家。他生活在公元前 427 年 ~ 公元前 347 年之间。据说，在夏天，他找了一棵遮蔽了 15 英尺的荫凉地的橄榄树来给学生讲课。那棵树在一片橄榄林中，1931 年，在雅典附近的挖掘中发现柏拉图学院遗址时，人们也确定了树的身份，使它成为希腊考古部门的保护对象。树立在雅典到港口城市比雷埃夫斯（Piraeus）的高速公路旁，因为公路繁忙，近年来它已经被尘土覆盖。1976 年，树木专家与希腊原子能中心合作，用碳同位素方法测定了树木年龄大约为 3000 年。

1976 年 10 月，一辆大巴冲出公路撞向柏拉图树，将盘旋的树干撞成四段。希腊政府立即行动起来，抢救古树。事故一年后，考古部的斯帕塔丽（Spathari）小姐宣布，原来的树干长出了新芽。现在，古树看起来不过是小灌木，为了避免悲剧再次发生，在它外面围了一圈金属栅栏。多年以后，它才可能

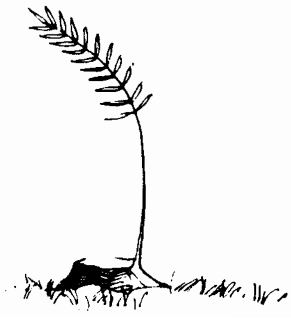


图 1

恢复往日的风采。

在爱琴海的科斯（Cos）岛还有一棵古树，是和柏拉图树年龄相近的悬铃树，也在希腊考古部的保护之下，因为据说古医药之父、科斯岛的西波克拉底斯（Hippocrates）就坐在它的下面宣讲他的医学实践。

3° 阿基米德纪念碑

圣何赛州立大学的校园里，正对纪念塔耸立着一座醒目的七英尺高的抽象雕塑，阿基米德，给赏心悦目的园地带来了理性的清风。在科学学院的朋友们的资助下，雕塑融合了艺术家的设计思想，其主题要素令人想起阿基米德的墓碑。雕塑融入了一个巨大的“神圣比例”的矩形，如果绕中心轴旋转那个图形，我们会发现旋转体的体积满足[2]

锥体: 椭球体: 圆柱体 = 1: 2: 3

2 见 Lester H. Lange《美国数学月刊》1981 年 5 月。

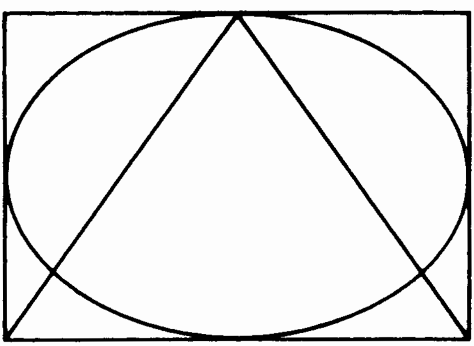


图 2

4° 预言

欧多克斯（Eudoxus）和柏拉图年轻时结伴游历埃及，在赫里奥波里斯（Heliopolis）停歇，和那儿的牧师住在一起。逗留期间发生了一件怪事。在一个寺庙里，神牛舔舐了欧多克斯的长

袍。在牧师们看来，这既是吉兆也是凶兆。他们预言，欧多克斯将闻名天下但寿命不长。牧师的洞察力果然不凡，欧多克斯的确成名了，可惜 43 岁就死了。

5° 大不敬

阿那克萨哥拉（Anaxagoras）是希腊数学家和天文学家，生活在公元前 5 世纪。据说他的天文学差点儿使他丧命——他毫不顾忌地宣扬太阳也许比希腊半岛的一角大不了多少。他因为亵渎太阳被关进监狱判了死刑，在朋友们的帮助下才死里逃生。

6° 终于

1980 年，在伽利略因为用望远镜证明地球围绕太阳旋转而被天主教堂审判 347 年后，梵蒂冈应教皇保罗二世（Pope John Paul II）的要求，开始重新审查伽利略的异端案。教会这样做的目的是想证明现代科学并没有否定基督的教义。

7° 阿里亚哈塔

1975 年 4 月 19 日，印度标准时间 13 时，印度第一颗科学卫星在苏联的一个卫星发射基地搭乘苏联火箭升空了。卫星以印度著名天文学家和数学家阿里亚哈塔（Aryabhata）的名字命名。阿里亚哈塔公元 476 年出生在库苏玛帕拉（Kusumapara，今尼泊尔帕坦附近）。

8° 比林斯利爵士

欧几里得《原本》的第一个完整的英译本是不朽的比林斯利（Sir Henry Billingsley，1535 ~ 1606）译本，发表于 1570 年。

因为没有几个数学家真的了解比林斯利，我们也许有必要看看他的小传：

> 比林斯利出身卑微，虽然设法在牛津攻读了三年，还是做了杂货店学徒。他的数学知识主要是跟一个奥古斯丁修会的修道士学的，那人叫怀特海（Whytehead），修道院解散后，他才"上岗"，靠比林斯利的学费维持生计，把自己知道的数学都传给他了，而且，好心的比林斯利似乎还不算坏学生。比林斯利辉煌一生，富贵而荣耀，后任伦敦市长，封爵士，1606 年以高龄去世。[3]



1570 年版英译本《几何原本》扉页插图

9° 集邮者的纪念

为纪念欧拉逝世 200 年，也为纪念欧拉在柏林诞生，1983 年，东德为柏林发行了一张邮票和特殊邮戳。邮戳展示了两个著名的欧拉公式：[4]

$$e-k+f=2 \text{ 和 } K=\pi^2 EI/l^2$$

第一个公式在英语著作里写作

3 见 W. B. Frankland《欧几里得的故事》，Hodder and Stoughton，1901

4 第二个公式为欧拉临界力公式，用于计算压杆（如受力作用的钢筋）保持曲线形态的平衡力。



$$v - e + f = 2$$

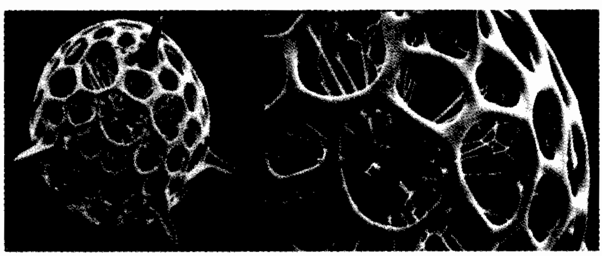
其中 v, e, f 分别代表任意简单多面体的顶（vertices）、棱（edges）、面（faces）的数目。在德语中，那三个词分别为 Eckes，Kantes，Fläches，因此公式的德语形式为

$$e - k + f = 2。$$

10° 上帝与数学

一个生物学家声称他见过被完美的六边形图覆盖的放射虫（radiolaria）。当他听说欧拉已经证明那是不可能的，回答说，“这证明了上帝比数学家高明。”

“欧拉的证明恰恰是正确的，”麦克库洛克（Warren S. Mc-Cullock）写道，“是生物学家的观察不准确。假如两家都是对的，也远不能证明上帝比逻辑更高明，倒是抓住了上帝自相矛盾的把柄，打击了他的智慧。”



放射虫的规则骨架

11° 多数狗比多数人聪明

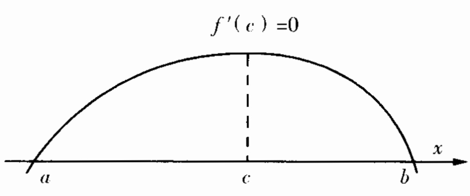
帕斯卡（Blaise Pascal）曾说，“我见的人越多，就越喜欢我的狗。”

12° 克雷尔杂志

有个关于数学杂志的故事。那杂志是克雷尔（August Leopold Crelle，1780～1855）在1826年创办的。虽然杂志（今天还在）很快以"克雷尔杂志"闻名，不过它原来的名字是 *Journal für die reine und angewandte Mathematik*（《纯数学和应用数学杂志》）。克雷尔本是工程师，原以为他的杂志会喜欢应用数学的文章。可事实正好相反，他刊登的纯数学论文远远超过了应用数学的论文。例如，在创刊的头一年，他就接受了阿贝尔提交的5篇长文。于是，有人打趣说，杂志标题里的 *und angewandte* 两字应该用一个读音近似的词来代替：*unangewandte*，即将标题改为 *Journal für reine unangewandte Mathematik*（《纯非应用数学杂志》）。

13° 微积分的敌人

罗尔（Michel Rolle，1652～1719）的名字对所有学生都很熟悉，因为微积分入门课程里有以他名字命名的定理：$f'(x)=0$ 在 $f(x)=0$ 的两个相邻实根之间至少存在一个实根。然而几乎没有哪个同学知道，罗尔是微积分的最激烈批评者之一，他曾努力证明微积分基于不合理的推理，带来了错误的结果。他和微积分闹得不可开交，科学院好几次觉得有责任站出来干预。



罗尔定理

14° 磨坊主数学家

同学们熟悉的另一个名字是格林（George Green，1793～1841），他在微积分课本里的那个著名定理如今是电磁学理论的基础。[5]但有几个同学知道格林其人呢？

5 格林定理将闭曲线上的积分化为在它包围的面上的积分。在三维情形，面积分可以化为体积分，即高斯定理——电磁学里的高斯定理的数学表示。

格林只上了一年学就进父亲的面包店做工了。父亲开了家风车磨坊，孩子就在上面的小房间里读书，借图书馆的书自学物理和数学。1828 年，他 35 岁，发表了最重要的著作《论数学分析在电磁学理论中的应用》。这篇论文包含了他著名的定理，但因为计算乏味，没引起多少注意。

1829 年，格林父亲去世，朋友们劝他去读大学。经过四年自学（弥补了他基础教育的空白），格林进入了剑桥大学卡尤斯（Caius）学院，4 年后从那儿毕业，可期末考试的表现令他失望。不过，他后来还是成了卡尤斯学院的佩尔斯（Perce）学者。两年后，格林去世，而他 1828 年的著名论文也重新出版，赢得了广泛的读者。这篇论文被誉为“英国数学物理的开端”。近些年来，大约有 8 位诺贝尔奖得主在他们的获奖研究中用了格林的“函数”。

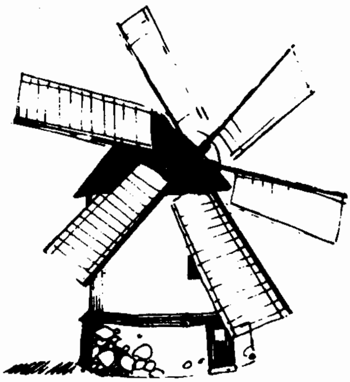


图 3

1923 年，当地商人部分重修了格林的风车磨坊，以此表示对格林的敬意。爱因斯坦也曾前来拜谒。1947 年，修复的磨坊被一场大火烧毁了。30 年后，人们再次提出重修这个纪念物。他们募集了足够的资金，把磨坊买下来，送给好意

的诺丁汉市议会。1980 年，人们发起“纪念格林请愿”活动，得到 20 000 英镑，终于使风车转动起来，磨坊也重新开始运行了。

15° 裁缝数学家

学微积分的同学差不多都在学平面面积近似计算的“辛普森法则”时熟悉了辛普森的名字。

辛普森（Thomas Simpson，1714～1761）是英国著名数学家。他是一个裁缝的儿子，很小就开始为父亲做事，没有受过多少正规教育。1724 年，他目睹了一次日食，从一个流动商贩那儿得到两本书，一本占星学的，一本算术的。很快，他就凭新学到的知识成了当地有名的算命先生。他后来和老板娘那已经是老姑娘的女儿结婚，进一步改善了经济条件。1733 年，他定居德比（Derby），白天做裁缝，晚上在夜校当老师。1736 年，他移居伦敦，很快发表了一本微积分教科书，大获成功。这样，他就从裁缝生活解放出来，可以专心教书和写书，写出了许多畅销的教科书，涉及代数、几何、三角和其他数学领域。这些书有很多版本，被翻译成多国文字。

有趣的是，令同学们记住辛普森名字的所谓“辛普森法则”，并不是辛普森发现的——在他那个时候就已经流行了。

16° 共享

克莱梅（Gabriel Cramer，1704～1752）是瑞士数学家，他对高等数学思想的传播为他在数学史上赢得了崇高的地位。20 岁时，他竞争日内瓦卡尔文研究院（Académie de Calvin）的哲学岗位。尽管克莱梅没能争到那个岗位，但他和另一个竞争伙伴都给

主管官员留下了深刻印象，结果新设了一个数学岗位，让二人共享。在两三年里，当其中一位出去旅行时，另一位完全负责那个岗位，领全额薪水。

克莱梅就是在旅行中遇到了当时的许多大数学家——伯努利家族、欧拉、达朗贝尔、哈雷等等。最后，克莱梅个人赢得了那个数学岗位，同时还获得了哲学职位。

17° 神学家牛顿

微积分学生心目中的牛顿是伟大的科学家和数学家，他在正确的逻辑指引下，通过揭示宇宙运行的秘密而为人类幸福辛勤地工作。

实际上，牛顿声称他工作的目的是为了证明上帝的存在。终其一生，他都在努力联系圣经里的事件与天文学现象，想据此推算那些事件发生的时间。他被那股狂热的激情左右着，浪费了很多年的时间去寻找丹尼尔（Daniel）的书，想从中发现世界末日和地狱的地理线索。

18° 拉马努扬的半身像



Paul Granlund 做的拉马努扬胸像

许多读者可能惊讶，拉马努扬（Srinivasa Ramanujan）的遗孀直到1986年还健在呢，距那位著名数学家去世已经65年了。她的心愿是看到她的丈夫在印度被人纪念，这激发了威斯康辛的阿斯凯（Richard A. Askey）想做一尊胸像，他组织募捐活动（直到1986年），超过100个数学家和科

学家捐了款。(拉马努扬的出生年可能有点儿模糊，大概是因为错读了他一封信里的一个数字。拉马努扬诞辰 100 周年纪念活动将在 1987 年举行。)

19° 哈代关于拉马努扬的演讲

1954 年，哈代在哈佛连续做了 12 次演讲，专门谈拉马努扬的工作。听众很多。为了演讲的方便，哈代先把需要的公式印出来，像音乐会节目单一样发给大家。

20° 哈代的夙愿

哈代是英国最重要的数学家之一，也是杰出的解析数论专家，有着强烈的反叛精神。他曾许下四个宏愿：

(1) 证明黎曼猜想；

(2) 在一场关键板球赛中大显身手；

(3) 证明上帝不存在；

(4) 刺杀墨索里尼 (Benito Mussolini)。

在前面的一个故事里 (《告别数学圈》A108)，我们还讲过哈代心目中的世界上惟一的三个百分之百为了自己的事业而奋斗的重要人物。

21° 永远的逻辑学家

哥德尔 (Kurt Gödel, 1906 ~ 1978) 是影响深远的奥地利逻辑学家和数学家，不相信能靠常识发现真理。据说，他因为发现美国宪法里存在逻辑矛盾，好几年都拒绝成为美国公民。

22° 不寻常的会议

数学家为纪念某个大数学家组织一个会议本是很寻常的事情。这样的会经常在数学家的诞辰周年召开。例如，1982 年在布莱因玛尔（Bryn Mawr）学院召开了诺特（Emmy Noether，1882 ~1935）诞辰 100 周年纪念大会，因为她曾在学院做过一段时间的老师；1977 年召开了一系列会议纪念高斯（Karl Friedrich Gauss，1777 ~ 1855）诞辰 200 周年；1979 年，世界各地召开了很多会议纪念爱因斯坦（1879 ~ 1955）诞辰 100 周年。

然而，1985 年在马萨诸塞州弗拉明汉姆（Framingham）学院举行了一个不同寻常的会议，它不是为了纪念哪个大数学家的百年诞辰，而是纪念一个伟大的数学定理发现 100 周年，那就是外尔斯特拉斯逼近定理："实轴闭区间上的任何连续函数可以在那个区间上表示为绝对一致收敛的多项式级数。"这个著名定理是外尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1815 ~ 1897）在他 70 岁那年（1885 年）7 月发表于《普鲁士科学院院刊自然科学卷》（*Preussische Akademie der Wissenschaften Naturwissenschaftlich Mittheilingen*）。

在 15 年的时间里，外尔斯特拉斯白天在中学教书，晚上做数学研究，而与数学家几乎没有真正的往来。为了尊重他的这段经历，大会请了当地的一些中学老师来谈他们的感想。

外尔斯特拉斯逼近定理在 19 世纪末激起了广泛的兴趣。在 20 世纪，产生了几个不同的证明，也引发了一些新的问题。有的问题已经解决，还有的问题正在研究。于是，外尔斯特拉斯发现了那样一个定理，吸引了数学家们 100 年的兴趣，成为数学知识体系的一个重要部分。而且，外尔斯特拉斯的生平对任何从事

数学研究的人来说，都是一个巨大的激励，因为他到了41岁才得到博士头衔，而且一生都在做数学。另外，他赢得了令人羡慕的荣誉，既是伟大的研究者，也是杰出的教师。

注：说起纪念某个数学成就而不是某个数学家的会议，还应该说一件大事：1924年到1949年间，为了纪念对数发现300周年，英国人计算了24位对数表。尽管纳皮尔（John Napier，1550～1617）在1614年的一本题为《对数法则的奇异说明》（*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*）的小册子就发表了对数讨论，但直到1624年布里格斯（Henry Briggs，1561～1630）才在他发表的《对数计算》（*Arithemetica logarithmica*）里包含了从1～20 000和从90 000～100 000的14位常用对数表。后来在荷兰书商兼出版商弗拉克（Adriaen Vlacq，1600～1666）的帮助下，才填补了从20 000～90 000之间的空白。

23° 圣诞卡

有个哈佛故事说，奥斯古德（Osgood）基于量纲的考虑，不赞同亨廷顿（Huntington）关于质量与 W/g 相等的断言。为强调他的观点，他给亨廷顿寄去一张圣诞卡，上面写着："Merry X-W/g."[6]

6 w/g = Mass（质量）。

24° 评价

有人说，罗素和怀特海的《数学原理》是难读的名著的杰出典范。

25° 母语

纽格鲍尔（Otto Neugebauer）1899年生于奥地利因斯布鲁

克，1926年在哥廷根获博士学位。1934年，他移居哥本哈根；1939年，他来到美国。他曾用英文而不是他的母语给一个数学家写信，令那人大为惊讶。他解释说，那和他的母语没关系，而是他秘书的母语。

26° 演讲的错误

任何人，只要讲多了，都难免会在无意间颠倒思想的因果，陷入尴尬。有一次，莫尔斯（Marston Morse）教授讲一个漫长而复杂的证明，就在快要讲完时，遭遇过这种情形。他本来是想说，“现在结论是显而易见的”，却说成“显然现在结束了。”

当我们知道演讲要电视录像时，像这样的错误或者其他讨厌的句子结构问题，似乎总是难免要发生的。

27° 印刷错误

盖尔达（Klaus Galda）在评论斯马里安（Raymond M. Smullyan）的《本书的名字叫什么?》时说，“《本书的名字叫什么?》的少数几个缺点之一是相对多的印刷错误。”[7]

7 见1980年1月《两年制学院数学杂志》。

28° 卡茨

卡茨（Mark Kac）是南加州大学（USC）数学教授，1984年10月25日死于癌症，时年70岁。他是概率论及其数论应用的先驱。

卡茨生在波兰，1938年来到美国。1981年进USC之前，他在纽约洛克菲勒大学做了20年的数学和理论物理学教授；而在那之前，他是康奈尔大学数学教授。他是他那一代的重要数学家，当选为美国艺术与科学学院（AAAS）和美国科学院院士。

卡茨口才一流，是故事员，也是演说家，说起话来妙语连珠，诙谐机智。有一次，他去听加州理工学院的费曼演讲。总喜欢取笑数学家的费曼在那天说，假如没有数学，物理学家6天就能把它构造出来。卡茨立刻大声说，“那可是上帝创造世界用的时间啊!”卡茨和费曼一道做出了他最有名的成就之一，即著名的费曼-卡茨公式，横跨了概率论与理论物理。

29° 沉重的大书

1696年出版了一部大部头著作，书名令人难忘：《地球新理论》。它在许多数学细节的支撑下，试图解释地球和太阳系的起源。

根据它的解释，起源从一颗巨大彗星的尾巴的混沌运动开始。行星（包括地球）和它们的卫星在那个巨大的彗尾中逐渐成形，在完美的圆形轨道上运行。开始时，地球并不绕轴自转，因此早期的“一天”其实是整整的一年。等亚当和夏娃吃了禁果之后，彗尾才启动地球自转，最后，地球在沿轨道运行一周的时间里也自转了360圈。同时，月球正好在30个地球日里绕地球运行一周。地球大气温暖而清澈，水汽稀薄，因而没有彩虹。

接着，在公元前2349年11月28日，星期五，神圣的上帝派另一颗彗星访地球，靠它来惩罚世间的邪恶。水蒸气在彗尾凝聚，形成暴雨落到地面，一连下了40个昼夜。然而，诺亚凭着勤劳和艰辛的工作，拯救了他的家庭和满满一船的动物。不管是因为那场大洪水还是因为某种磁力，结果地球成了椭球形，轨道也成为椭圆，使它一年的时间增加到了如今的360多天。这时，天晴了，第一道彩虹出现了，多余的水流进了地球内部。

上面的这个理论，为了维护《旧约》的创世纪神话，还找

了大量的图像、渊博的希腊文脚注和不同文化的传说来支持。

《地球新理论》的作者是维斯顿（William Whiston），继牛顿之后做了剑桥大学数学教授。他的书受到同事们的欢迎，也得到了牛顿和洛克（John Lock）的高度赞扬。维斯顿除了是数学家，还是一个牧师。

爱因斯坦

爱因斯坦因为极其偶然的机会成了现代最受大众崇拜的科学家，于是关于他流传着许多故事和传说。也有很多写他的优秀传记，其中尤为突出的是最近的两种：派斯（Abraham Pais）的《上帝难以捉摸——爱因斯坦的科学与生活》（牛津大学出版社，1982）和赛因（Jamie Sayen）的《爱因斯坦在美国——希特勒和广岛时期的科学家的良心》（Crown Publishers，New York，1985）。

任何爱因斯坦的崇拜者都喜欢读这两本书，它们写了很多真实的故事。在前几次数学圈旅行中，我们已经讲过很多爱因斯坦的故事了。

30° 忘了

爱因斯坦到普林斯顿不久，就得了“心不在焉教授”的头衔。那主要是因为他老是记不住自己住哪儿。据说，他曾两次在不同场合问路人纳苏（Nassau）大楼朝哪个方向走，还解释说，他去纳苏楼是因为他能从那儿找到回家的路。他每次问地址时，人家都给他画一张很详细的路线图。他每次感谢人家时，都只说他要去纳苏楼。

31° 油漆的门

关于爱因斯坦的门的颜色流传着一个也许是大家最熟悉的故事。大概因为爱因斯坦经常错把别人的家当成自己的家，他决定给自家大门涂上大红油漆，这样就不会弄错了。有人对此表示怀疑，但住在附近新泽西贝尔米德（Belle Mead）的奥尔森（George Olsen）保证那是真的，他曾经常帮爱因斯坦做些杂活儿。

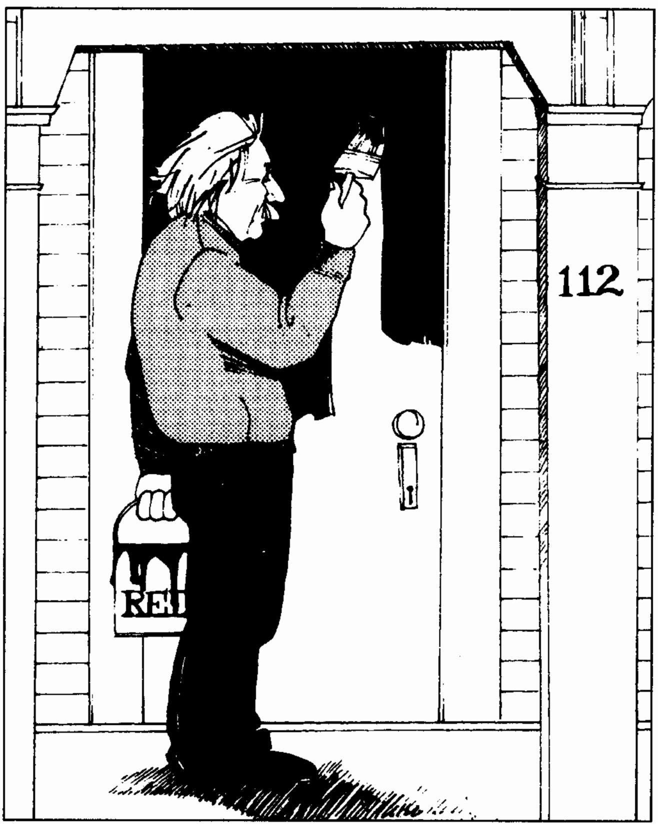


图 4

32° 爱因斯坦的电话

为了能留一点儿私人空间，爱因斯坦有一个没登记的电话号码。遗憾的是，他总是记不住，所以他每次忘了家在哪儿，也不能给家里打电话。据记录，爱因斯坦曾向普林斯顿大学总机询问他住哪儿。

33° 废弃的照片

有个广为流传的故事，讲爱因斯坦的一件倒霉事情。一天，他走在回家的路上，陷入忘我的沉思中。那天那条街正好挖开一个大坑，他还没察觉就掉进坑里了。普林斯顿的摄影师理查德（Alan Richard）碰巧经过那儿，抓拍了这个灾难的瞬间。

在理查德帮助下，爱因斯坦从坑里爬出来，感到很窘迫，不过没受伤。他恳求理查德不要把照片印出来。理查德慷慨地把胶卷给了爱因斯坦。

在后来的年月，爱因斯坦和理查德成了好朋友，大科学家也成为理查德更多优秀照片的主角。

上面的故事令人想起发生在泰勒斯身上的同样尴尬的事情：一天晚上，他一边走一边看星星……见《走进数学圈》27。

34° 帆船

爱因斯坦从帆船找到了极大乐趣。帆船吸引他的不是竞赛的刺激或旅行的快乐，而是它融入了自然和梦想，像风一样带着他飞扬。他也把帆船当做一项体育锻炼。在美国，他有很多机会划着他的小船“Tinef”（大概意思是“微不足道”）在淡水和盐水中漫游。但他亲密的朋友们却常为他划船担心，因为他不会游

泳。1944 年夏的一天，他就差点儿出意外。他正和几个朋友在波涛起伏的水面航行，突然他的小船撞上了礁石，很快就灌满水，要翻了。爱因斯坦抓住帆板，在水中挣扎了好一会儿才让腿挣脱了绳子。幸运的是水很温和，而且摩托艇很快把航行者们救了。经过这次历险，爱因斯坦的烟斗再没离开过他的手。

这个故事令人想起高斯小时候也差点儿淹死。(见《走进数学圈》320。)

35° 爱因斯坦的阅读障碍

有一种叫“阅读障碍”的复杂的儿童病，大脑会不自觉地变换字母，扰乱组词。有阅读障碍的患者在读书的时候会经常迷失位置，跳过个别词句甚至整整一行文字。那样阅读的文字当然毫无意义，他们会满怀沮丧地反复阅读同样的内容。在他们看来，印刷的文字模糊不清，仿佛在不停地活动，字母也经常前后颠倒。在数学中，阅读障碍患者还有长期记忆的烦恼，不能记住加减乘除口诀，不过能理解数学概念。

在《告别数学圈》(A116) 中，我们说过爱因斯坦发育迟缓，3 岁还不会或不愿说话。小学时，他做加法很难，要掰着手指头学乘法表。纽约大学医学中心副教授列文森 (Harold N. Levinson) 博士对阅读障碍素有研究，他相信爱因斯坦学初等数学的困难就源于他小时候有阅读障碍，尽管他后来成功学会了大量数学概念。

在列文森发现的阅读障碍者中，有很多是天才人物，包括艺术家、作家、诗人、科学家和物理学家。“实际上，”列文森说，“对有些人来说，如果不是因为阅读障碍，他们就不会获得那么大的成功和荣誉。那其实是成功的一种激励。”

36° 心不在焉教授

爱因斯坦多年因胃痛而苦恼。医生们最后诊断那是营养不良的结果，因为爱因斯坦经常忘了吃饭。

他的医生朋友普雷希（Janos Plesch）曾说，“因为他的大脑没有极限，所以身体也跟着不讲规律。他睡觉要人叫才醒，他醒着时要人叫才睡，要把东西放到眼前他才想到吃饭，而吃起来就不停，直到要做别的事情。”

37° 找运气

普林斯顿大学有个新生，功课很不好。雪后的一天早晨，他等在爱因斯坦去费因楼的路上。然后，他跟在大科学家身后十几步，小心翼翼地踏着爱因斯坦的脚印慢慢前行。他那天的考试成绩提高了，还想着走好运呢。

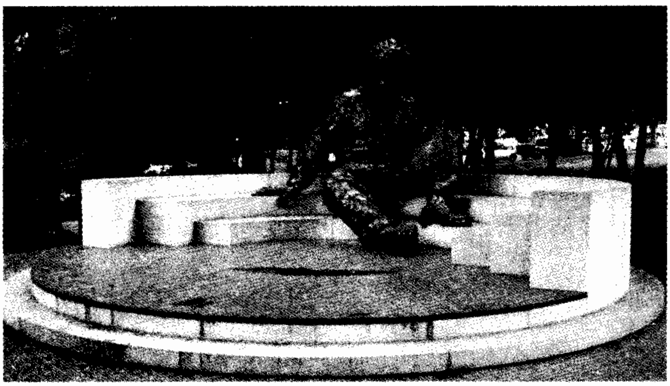
38° 紧张时刻

帕诺夫斯基（Hans Panofski）曾请他父亲和爱因斯坦去看艺术表演。演出结束后，小伙子开车送二人回家。因为持的是过期的加州驾驶执照，当汽车被警察挡下时，他心都要跳出来了。不过令他放心的是，警察挡车只是为了确认从他面前经过的真是那个伟大的科学家。

39° 爱因斯坦胸像

“我第一次见爱因斯坦时，他的躯体仿佛悬在脑袋上。他的头发看起来就像一团涡旋星云。”时间是1953年，地点是爱因斯坦在新泽西普林斯顿的家，雕塑家贝克（Robert Berks）在为这

位原子科学之父做胸像。贝克雕塑时，爱因斯坦正在思考电磁学的理论，说“世界需要英雄，如果他们像我一样善良而不像希特勒那么罪恶，世界会更好。”艺术家用了24年时间找赞助，为的是把小雕像放大成真人尺寸的纪念像。现在，他的爱因斯坦身穿汗衫和便鞋，正立在华盛顿呢。这座塑像是美国国家科学院为纪念爱因斯坦百年诞辰出资160万美元制作的。贝克说，他希望他的12英尺的镀铜雕像能表现爱因斯坦人道博爱的一面。“他的力量与温和令我看到了英雄并不只是小说里的那样。”



美国国家科学院的爱因斯坦雕像

40° 没有奉承

爱因斯坦走到哪儿，奉承就跟到哪儿。可有那么一次，爱因斯坦没听到奉承话。奥尔森讲过这样一个有趣的小故事。

奥尔森是普林斯顿大戏院的招待员，经常在晚上工作。爱因斯坦和女儿常去那家剧院。一天晚上，奥尔森发现剧院门口聚集着一大群满怀期待的人，他想他们是来等爱因斯坦和女儿出来的。令他惊讶的是，爱因斯坦出门时，那些人似乎根本就没在意。

过了一会儿他才明白是怎么回事：当晚访问普林斯顿的流行

歌手琼尼雷（Johnnie Ray）从疯狂的人群中走出来了。爱因斯坦消失在大街上，一点儿也不知道后面发生的事情。

41° 尴尬的奉承

心理学家哈德里·坎特里尔（Hadley Cantril）的儿子阿尔伯特（Albert Cantril）讲过一个爱因斯坦发火的故事。阿尔伯特的母亲曾到爱因斯坦家中拜访，请他为孩子们的几本书签名。

正当她向秘书解释来访目的，大赞爱因斯坦多么伟大时，大科学家自己下楼来了。爱因斯坦听了他们的谈话，一反常态，勃然大怒，大嚷阿谀奉承是个人崇拜，希特勒们就是靠它催生出来的。

当时正好有个拜访爱因斯坦的同事在场，他出来调解，缓和了尴尬场面，要坎特里尔太太把书留下。尴尬的太太走了，"恨不得有地缝钻进去。"后来，爱因斯坦亲自在书上签了名，还给坎特里尔太太。

42° 矛盾

托马斯·曼（Thomas Mann）是德国著名小说家，一个流亡者，1938～1941 年间住在普林斯顿。他觉得普林斯顿很可恶，说他在那儿的演讲是两年笑话。他像贵族一样住在图书馆大楼上的巨大的红墙堡垒里。爱因斯坦是德国著名科学家，也是流亡者，也住在普林斯顿。他感觉普林斯顿是个愉快的小城，他喜欢偶尔在那儿发表演讲。他生活简单，住在不大的木结构的房子里，与曼的那个张扬的别墅隔着一条街。

圣诞之夜，一群人会到两家唱圣歌。当他们在爱因斯坦家门歌唱时，科学家会穿着衬衣（没穿袜子）走出来，站在走廊上。

他认真倾听他们唱歌，秘书会拿出外套来轻轻披在他肩上。歌唱接近尾声时，他会下来和演唱者一一握手，感谢他们。

然后，歌唱者们来到曼的大宅门前。只见华丽的窗帘从窗户落下，没人出来说声谢谢。从窗帘的缝隙偶尔可以看到高贵的客人们在屋里晃动，盛大的舞会正在进行中。

还有一次，唱着圣诞颂歌的人群来到爱因斯坦家门时，他走出来笑了笑，然后回到房间，拿起小提琴，为他们伴奏。

43° 破记录？

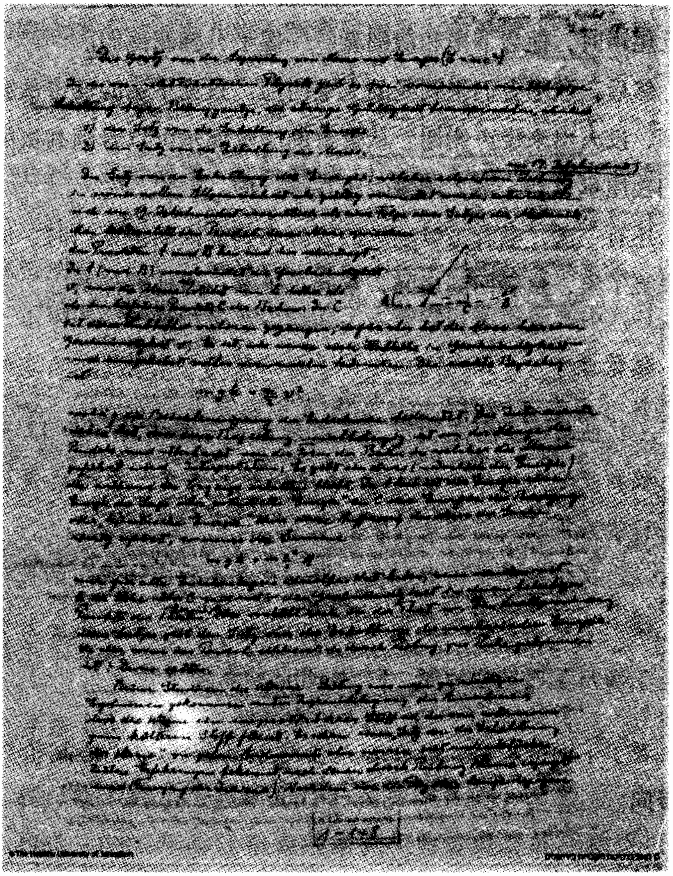
> 纽约——阿尔伯特·爱因斯坦亲笔签名的一份 12 页手稿在星期六的拍卖会上以 55 000 美元成交，据悉这是已故科学家手稿成交的最高价。
>
> 这份解释爱因斯坦统一场论及其在物理学史上的地位的德文手稿，曾在克里斯蒂（Christies）的一次拍卖会上卖给了加州圣巴巴拉的 M. F. Neville 珍本图书馆。[8]

8 见美联社，The Orlando Sentinel，1983 年 12 月 18 日星期日。

看了下面的故事，也许有人会对上面报道的“最高价”提出疑问。

44° 手稿拍卖

第一次世界大战期间，成立了一个叫“书与作者战争债务委员会”的组织。组织的目的是收集名人手稿来为战争拍卖。委员会向爱因斯坦征集他著名的 1905 年的相对论论文的原始手稿。爱因斯坦回答说那手稿已经不在了，论文发表后就被扔掉了。他另外提供了最近一篇论文的手稿，“双矢量场”（与巴格曼（Valentine Bargmann）合作）。委员会满心欢喜，不过还是硬



爱因斯坦提出公式 $E=mc^2$ 的文章手稿

着头皮请爱因斯坦将 1905 年发表的那篇论文用手写体抄一遍。爱因斯坦勉强答应了。1944 年，这两个手稿整齐地装订在一个书套里，在堪萨斯城的一次拍卖会上卖得 1150 万美元，很快又被买主捐献给了国会图书馆。爱因斯坦评论说，“经济学家需要修正他们的价值理论了。”

45° 尼赫鲁杜鹃

1949 年 11 月 5 日，印度总理尼赫鲁（Jawaharlal Nehru）访问了爱因斯坦的家。两人相互倾慕已久。几天后，尼赫鲁给爱因斯坦在普林斯顿梅瑟街 112 号的家送来礼物表示感谢。礼物是一株杜鹃花，就种在爱因斯坦屋前，此后被大家称作“尼赫鲁杜鹃”。



图 5

46° 答非所问

1946 年，佛罗里达州参议员皮普尔（Claude Pepper）来普林斯顿大学讲东欧形式。讲话后，爱因斯坦把参议员请到家里，因为他很想了解东欧的情况。但皮普尔更渴望了解相对论。一会儿，两个人就各自提出自己感兴趣的问题。最后，皮普尔赢了，爱因斯坦给他讲了相对论的基本思想。

47° 最喜爱的短篇小说

爱因斯坦最喜欢的短篇小说是托尔斯泰的《一个人需要多少土地?》小说讲了一个动人的寓言：魔鬼给某人一个机会，他可以得到在一天之内步行包围的所有土地。那人因为贪婪和卑鄙，一天还没过去就累死了。这样，托尔斯泰就得到小说题目的那个问题的答案：一个人有三尺黄土做坟墓就足够了。

48° 解乏妙方

爱因斯坦刚经过一次大手术，就去参加一个会议，要听很多

物理学演讲。会议结束时，有人很惊讶爱因斯坦并不显得比别人更疲惫，一点儿不像刚做过手术的病人。爱因斯坦笑着回答，“如果我真的懂了他们讲的东西，也会疲惫的。”

49° 最大的痛苦

爱因斯坦的小儿子爱德华（Edward）有精神分裂症，一生的多数时间都住在瑞士的家里。爱因斯坦和第一个妻子分开的时候，那个极其敏感的孩子才4岁。离开孩子是爱因斯坦一生中最痛苦的经历，而爱德华的病更加深了他的痛苦。

50° 爱因斯坦的大脑

在《告别数学圈》（A44）里，我们讲了高斯和狄利克雷的大脑还保存在哥廷根大学生理学系。1955年爱因斯坦死后，他的大脑也在尸体解剖时被取下来。他在普林斯顿医院死于动脉瘤，人们想从他的大脑发现他天才的秘密。公众一直不知他的大脑藏在什么地方，直到最近，人们才在堪萨斯卫奇塔（Wichita）实验室追踪到他的部分大脑，“漂浮在一个梅森瓶里”。[9]

9 一种有金属螺盖的玻璃瓶，源于美国发明家梅森（John L. Mason，1832～1902）。

51° 暗语

有的家庭会说些暗语来提醒家里人，“你喝得太多了”，“你说得太多了”，“你的内衣露出来了”，或者“该回家了”。

爱因斯坦的名字好像也成了某些尴尬场面的暗语，例如忘了拉上裤子的拉链。爱因斯坦教授的穿戴漫不经心，他出门时，经常是穿着破旧的汗衫，松垮着裤子，而且不穿袜子。因为穿着随便，他经常忘了拉上裤子拉链。于是，当有人出现这种情况时，家里人就会说“爱因斯坦”来提醒他。

还有的家庭则用数学的未知数 XYZ 来暗示同样的情形："Examine your zipper."（检查你的拉链）。

爱因斯坦的相对论

52° 一个简单的解释

杜卡斯（Helen Dukas）是爱因斯坦的秘书兼管家，她的任务之一是让教授躲避公众。身为中间人，她经常被问到爱因斯坦的科学工作的问题，而这些问题并不总是容易回答的。于是爱因斯坦告诉她，如果有人要她解释相对论，她可以说，"在公园长椅上和一个漂亮女孩儿坐一个小时就像一分钟，而在火炉上烤一分钟就像一个小时。"

对这个答案，可能有人会问，"爱因斯坦就靠这些废话生活吗?"

53° "大脑袋"

一个自以为聪明的"大脑袋"给一群人讲爱因斯坦的"相对论"。他大谈了一个钟头，有人打断他说，"伙计，你知道吗，即使谈的是爱因斯坦自己的理论，可你比他还了不起呢。人家说全世界只有 12 个人懂爱因斯坦和他的'相对论'——而一个懂你的人都没有!"（Harry Hershfield）

54° "打倒爱因斯坦"

赫维塞（Oliver Heaviside，1850～1925）是著名英国物理学家，个性很古怪。他的名声在于他的电磁理论研究和运算微积

分。不到25岁他的耳朵就开始聋了，这造就了他的孤僻性格。他提出过很多远见卓识，例如鼓吹灵巧的矢量分析远胜于哈米尔顿笨拙的四元数运算。他也有不少认识的盲点，例如谴责爱因斯坦和他的理论。他是当时攻击爱因斯坦的惟一的一流物理学家，而他对相对论的谩骂也近乎荒谬。

55° 两只水桶

有很多关于"相对"的故事，讲故事的人觉得它们多少能代表一点爱因斯坦的理论。例如有这样一个寓言：两只桶去井里打水，一只桶说，"真够郁闷的，我们装满了又有什么用呢？装满水走了，可回来还是空的。"

"兄弟！你那样看问题就太奇怪了，"另一只桶说，"我喜欢这样想：尽管来是空的，但总是装满了走的。"

56° 很多事情都是相对的

刻槽（groove）与坟墓（grave）的区别只是个深浅问题。

57° 都是相对的

记者问中国驻联合国代表，"美国人令你印象最深的最古老事情是什么？"那人回答，"我想是他们特别倾斜的眼睛。"

58° 没什么不同

某人在乡间开车旅行，看见一个老人坐在栅栏的围栏上，看着从身边驶过的汽车。游客停下车说，"我可受不了那样的生活。你什么也看不见。你不像我那样旅行，我一直在运动。"

栅栏上的老人慢慢地看着下面的陌生人，然后懒散地说，

“我看不出你我做的有什么不同。我坐在栅栏上看汽车经过，你坐在车里看栅栏经过。那正是你看事情的方式。”

59° 相对密度

你可以发一个消息在七分之一秒内环绕整个世界，但你也许要好多年才能使一个简单的思想在一个大脑里推进四分之一英寸。

60° 万物都是相对的

如果从树上落下的是猴子而不是苹果，牛顿也许会发现物种起源而不是万有引力。

爱因斯坦和小朋友

61° 他的耳朵

爱因斯坦很喜欢小孩儿，乐意摆动自己的耳朵让他们高兴。

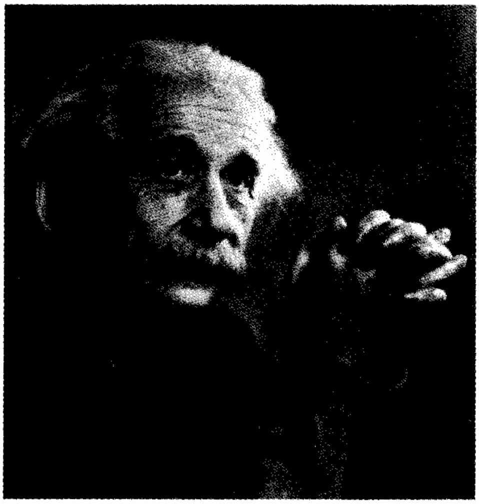
62° 他的袜子

小朋友们常问爱因斯坦，他为什么不穿袜子。一个小女孩儿说，“你妈妈会担心你感冒的。”他曾对几个小男孩儿解释说，“我已经长大了，人家要我穿袜子，我可以不穿。”

63° 他的头发

一个小孩儿看见爱因斯坦从身边经过，问妈妈：“那是爱因斯坦太太吗?”还有个小孩儿，被带上楼去向爱因斯坦问好，然

后赶紧跑着下来，大声喊道，“妈妈，你说得对，他真像头狮子。”



64° 水痘

魏格纳（Wigner）太太把爱因斯坦的包裹拿来，老人问她的孩子怎么样。她说他们很好，只是得了水痘。

“他们在哪儿?”爱因斯坦问。

“他们在外面的车里等着呢。”她回答。

“噢，我也得过那种病的，”爱因斯坦笑着跑着出去看孩子了。

65° 真相

有个广为流传的爱因斯坦和一个小女孩儿的故事。小女孩儿请爱因斯坦帮她做算术，老头儿做了，大大提高了她的算术成绩。后来，孩子的母亲问爱因斯坦他从中得到什么好处，据说老

头儿的回答是，“哦，我每次帮她，她都给我一根棒棒糖。”（例如，参见《相约数学圈》S97。）和很多大人物的故事一样，这个故事有根据，但也有些走样。关于小女孩儿和她的算术，真实情况是这样的：

20世纪30年代末，阿德莱德·德龙（Adelaide Delong）是普林斯顿费因小姐学校的三四年级学生。德龙一家和爱因斯坦住在同一条街，但相距半英里。一天，德龙太太路过爱因斯坦家时，指着它对小女儿说，那是世界上最伟大的数学家住的地方。阿德莱德那时正好遇到了算术难题，于是，那天下午，她没有直接从学校回家，而是去了爱因斯坦的家。虽然小孩儿才8岁，她还是被领进了门，爱因斯坦也知道了。孩子给爱因斯坦带了一把奶油软糖。爱因斯坦接受了糖果；但听说要帮她做算术，他和蔼地拒绝了，因为他觉得那样做对老师和其他同学不公平。为了感谢孩子的糖果，爱因斯坦给了她一些饼干。虽然求助的目的没有达到，小阿德莱德却成了爱因斯坦家的女士们最喜欢的孩子，常到家里来玩儿。

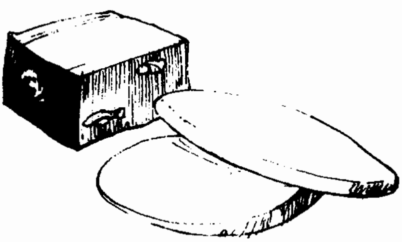


图6

66° 枪手

两个小男孩儿发现爱因斯坦很会玩儿水枪。每年夏天，他们都为自己和爱因斯坦准备喷水枪。据说，爱因斯坦既能像骑士那样玩儿决斗，也会像牛仔那样举枪就射。过路人常常惊讶地看到爱因斯坦和两个小孩儿像捉迷藏那样借树木掩护，向对方开枪。

67° 童心

爱因斯坦晚年交了很多小朋友。有个小孩儿每天都在大科学家从普林斯顿大学数学系大楼回家的路上等着他。两人互开玩笑，讲笑话给对方听，然后跟着来到爱因斯坦家里，参观他那个迷人的小化学实验室。

68° 通信

爱因斯坦收到过很多小孩儿的来信。有个南非小女孩儿来信说，她很惊奇爱因斯坦还活着，她原来以为他是和牛顿一个时代的人呢。爱因斯坦回信说，“很抱歉我还活着。不过还可以补救。”不久女孩儿来了第二封信，坦白她是个女孩儿，是爱因斯坦错把她当男孩儿了。爱因斯坦回信说，“我不介意你是女孩儿。重要的是你自己不要介意。那是没道理的。”

爱因斯坦的幽默

69° 一个新定义

有一次宴会后，爱因斯坦耐着性子听一个乏味而罗唆的演说。他转身对身边的人小声说，“我现在想到无穷大的一个新定义了。”

70° 虎子

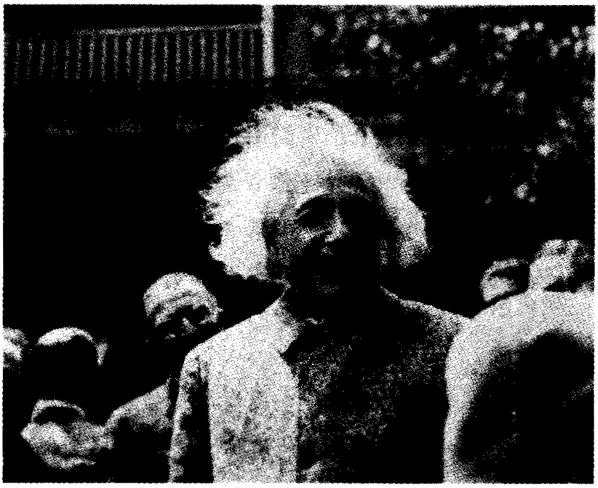
不论什么时候下雨，爱因斯坦家的猫“虎子”都会很痛苦。爱因斯坦就满怀深情对它说，“宝贝儿，我知道哪儿出问题了，

但我真的不知道怎么让它停下来啊。”

71° 摩西

爱因斯坦的女儿玛格特（Margot）出门，看见一只叫“摩西”的长毛大狗。一回到家里，她就向父亲描述那只狗的模样，最后说那狗的头发太多了，简直分不清前后。爱因斯坦回答说，“关键是他自己知道。”[10]

10 想想爱因斯坦“像狮子”一样的头发吧，难怪他要说“他自己”知道。另外，“摩西”是《圣经》里制定法典的伟人，而爱因斯坦是为自然立法的伟人。



爱因斯坦在 1945

72° 奇科

玛格特答应照顾一条叫“奇科”的白毛小猎犬，它很快就成了家里的永久而重要的一员。奇科特别喜欢爱因斯坦。“他是只聪明的狗，”爱因斯坦说，“很同情我每天都被来信淹没了。他真想咬那邮递员，竟然给我送来那么多的信。”

73° 忠告

有人问爱因斯坦，他是否相信犹太人是不允许和教外的人结婚的。他会心一笑，回答说，“那很危险，可话又说回来，所有婚姻都很危险。”

爱因斯坦语录

74° 爱因斯坦的话

在前几次数学圈旅行中，我们引用过许多爱因斯坦的妙语，下面再引用几句：

> 想象比知识更重要。
>
> 现代教育方法还没完全扼杀人们神圣的好奇心，那简直是一个奇迹。
>
> 尽管我在日常生活中是个典型的孤独者，但意识到我属于一个看不见的追求真善美的群体，我就不感到孤独了。

75° 爱因斯坦年历

1985 年出现了一种精美的年历，印的是雅可比（Lotte Jacobi）拍摄的漂亮的爱因斯坦照片。每月一张，每张照片都配以一句爱因斯坦语录。下面就是那些精炼的句子：

> 国家已成为现代偶像，几乎没人能逃脱它那诱人的力量。
>
> 真正伟大而激动人心的每一件事情都是能自由劳动的人

们创造的。

想对目的和意图说任何可靠的话，是很不可靠的事情。

任何手段，假如背后没有一个活着的精神，都将只不过是笨拙的工具。

可以有组织地应用已有的发现，但不能靠组织去制造发现。

我们必须克服国境带来的可怕障碍。

安全是不可分割的。

能靠行动说话时，评判也许就毫无意义了。

我不能预见原子能将来会不会成为上天的伟大恩赐，但我不得不说它现在是一种威胁。

我们知道一点儿政治家不知道的事情。

通向地狱的路上满是口头的理想。

我生活在那样的孤独中，年轻时感觉它令人痛苦，老了才发现它那么美好。

76° 论歌德

虽然爱因斯坦钦佩歌德的智慧和聪明，但并不喜欢他的作品。其理由多少反映了科学家自己的个性："我觉得他对读者怀有一种居高临下的态度，缺乏一定的谦逊和真诚，而那些品格，尤其在一个伟人身上，会产生巨大的感人效果。"

77° 说服同事

著名心理学家坎特里尔是爱因斯坦的朋友和邻居，有一天，他向爱因斯坦展示了他那后来很出名的梯形房间模型。爱因斯坦一眼就看出了这种室内设计的心理学和哲学意义，它会产生看起

来像正方形的错觉。

坎特里尔抱怨，他很失望他的同事们对他的发现不感兴趣，爱因斯坦安慰他的朋友说，“我已经学会了不浪费时间去说服同事。”

78° 上帝难以捉摸

爱因斯坦曾说，“上帝难以捉摸，但他不怀恶意。”维布伦（Oswald Veblen，当时是普林斯顿大学数学系的老师）听说后，就把它记下来了。1930 年，当费因楼在普林斯顿大学落成作为数学系大楼时，他征得爱因斯坦同意，把那句话刻在了教工休息室的大理石壁炉上。爱因斯坦解释说，他这话的意思是，“自然隐藏她的秘密是因为她高傲的天性，而不是因为诡计。”

79° 对死亡的思索

妹妹玛雅（Maja）死了，爱因斯坦和女儿玛格特静静地坐在屋后的走廊上。就这样过了好一会儿，他才指着树木和天空，温和地对女儿说，“放眼自然，你会更了解死亡。”

80° 种族主义

天才的女低音歌手安德森（Marian Anderson）因为是黑人，被普林斯顿纳苏大酒店拒之门外。爱因斯坦请她住在他家。从此以后，安德森每到普林斯顿来演出，都住梅瑟街 112 号。

爱因斯坦曾说美国社会“最恶劣的病”就是“对黑人的态度。没有从小习惯这种不公平的每个人，仅仅看到它就会感到难过；成年后才了解这个国家的每个人，不仅会感到这种不平，还会嘲笑建立美国的国父们所谓的‘所有的人生来平等’。”针对

同一个问题，他后来写道，[11] “我愈觉得自己是个美国人，这种情况愈使我感到痛苦。我只有把话说出来，才能摆脱同谋的内疚。”

11 这是爱因斯坦发表在1946年1月《壮观》（*Pageant*）杂志的一篇文章里的话。

81° 爱因斯坦的成功公式

爱因斯坦说，他的成功公式是

$$x + y + z = \text{成功}$$

其中 x 代表艰苦的工作，y 代表娱乐。总有人问他，“那 z 代表什么呢？”

“哦，那个嘛，”他有点儿吃惊，回答说，“代表该什么时候听。”

82° 沉默是金

有一次，爱因斯坦和女儿玛格特两人一起吃饭，女儿见父亲已经沉浸在思想中了，只是在机械性地咀嚼，于是她也一言不发。一顿沉默的饭后，爱因斯坦抬头看着玛格特，轻声说，“Ist dies nicht schön?”（难道那不美吗？）

83° 真的？

有一次，秘书给爱因斯坦读他以前发表的论文，他打断问，“我真的那样说过吗？”确定后，他说，“我还能说得更简单一些。”

84° 集中营

普林斯顿高等研究院院长弗勒克斯纳（Abraham Flexner）把

爱因斯坦藏得很紧，完全躲避了来访者和公众的询问。有一次，爱因斯坦生气了，告诉了朋友怀斯（Rabbi Wise）。他的回信地址写的是："普林斯顿集中营"。

罗巴切夫斯基和博莱

85° 人梯

罗巴切夫斯基对年轻人就像一个慈父，有很多故事讲他如何在教学中扶持年轻人。他曾看见一个伙计在柜台后面抓紧点滴时间读数学。罗巴切夫斯基想办法让那年轻人进了学校，接着他又进了大学，最后成功得到了那所大学的物理学教授职位。

另一个故事说，一个穷牧师的儿子徒步从西伯利亚来到喀山，条件十分艰苦。罗巴切夫斯基为他出钱，让他进了大学的医学院。事实证明他的关爱没有错，那学生毕业后成了全身心投入的好医生，而且，为了表达他的感谢，他遗赠给学校一个有价值的图书馆——因为他的校长在他最需要的时候给过他那么大的帮助。

86° 爱自然的罗巴切夫斯基

离喀山不远，在伏尔加河上游，有一个小村庄，罗巴切夫斯基的主要乐趣就是在那儿料理花园和果园。有个悲伤的故事说，他在那儿种了一小片榛子林，可他很清楚自己不可能吃到那些果子。他去世不久，树就结出了第一颗果子。他对一切农业、园艺和放牧的事情都感兴趣，而他在这些方面的活动，赢得了一枚莫斯科皇家农学会的银质奖章。[12]

12 见 W. B. Frankland《欧几里得的故事》，1901

87° 比较

如果说罗巴切夫斯基的天才令人仰慕，那么博莱（János Bolyai）的天才就令人惊奇了。前者费了一生精力坚持不懈做出的事情，后者似乎一鼓作气就完成了。如果说罗巴切夫斯基的坚韧像一颗不断增长的行星，那么博莱的辉煌经历就像瞬间消失的流星。[13]

13 见 W. B. Frankland《欧几里得的故事》，1901。

88° 一个没讲完的故事

关于博莱，最常听人讲的故事是他连续与13个官员决斗。因为某种矛盾，13个官员同时挑战博莱。博莱答应了，不过要求在同一个人决斗之后他要用小提琴弹一小曲。大家也同意了。他一鼓作气击败了所有的对手。决斗之后发生的事情就很少听人讲了。不久，政府提升博莱为上尉，条件是他马上从新岗位退下来，领退休金。政府觉得应该尊重他的利益，因为几乎不可能再遇到同样的事情发生了。

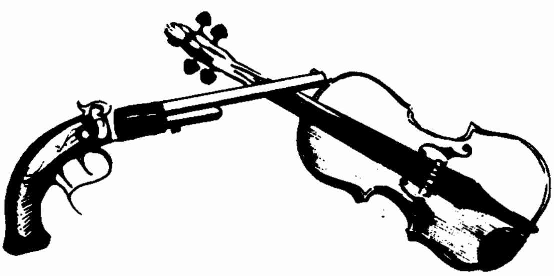


插图 7

89° 博莱的性格

博莱的个性可以用孤独二字来概括：他几乎一生都过着隐居的生活。见过他的人都惊讶于他古怪的行为和思想方式——不

过，他的几何工作极大地弥补了他个性的古怪，最终人们记得的是黄金的光芒，它的奇异形态早被人遗忘了。[14]

14 见 W. B. Frankland《欧几里得的故事》，1901。

90° 通用语言

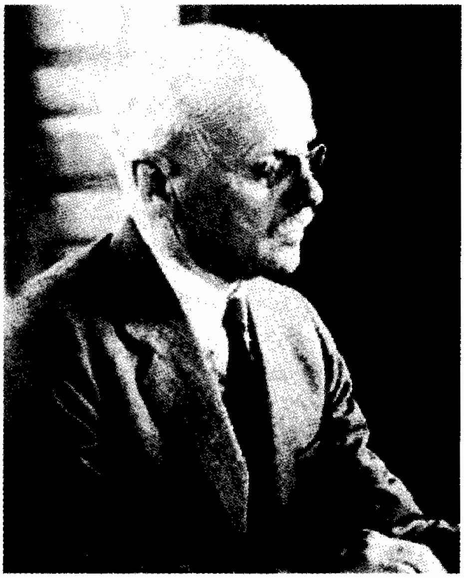
接近生命终点时，博莱想构造一种通用语言，他声称在音乐里实现的东西也一定有望在人类生活的其他领域实现。

第二象限

从概率到蟋蟀

库 里 奇

库里奇（Julian Lowell Coolidge，1873～1954）是20世纪前50年哈佛卓越的数学教授，是杰斐逊（Thomas Jefferson）总统的后代，洛维尔（1908年～1933年间的哈佛大学校长，喜欢数学）的堂兄弟，做过罗斯福的老师（在格罗顿），1898年战争期间，是罗斯福手下的一名“狂野骑士”。1902～1904年间，他跟科瓦列夫斯基（Kowalewski）、斯塔迪（Study）和塞格雷（Segre）学数学。1925年当选为美国数学会会长，同年创立学会查文尼特（Chauvenet）奖。1930年被任命为洛维尔学院首任院长，在那些年里写了大量优秀的数学著作（均由牛津大学出版）。



库里奇(1873～1954)

在那个年代，库里奇也许是美洲大陆最出色的几何学家。作者本人1934年到1936年间在哈佛读研究生，荣幸并快乐地在他的指导下做几何研究。库里奇是一个非凡的引路人。他有着迷人的机智和幽默，他的头脑里装满了数不清的几何知识。

91° 概率

库里奇对概率论很感兴趣。他1909年的论文“赌徒的毁灭”较早地考察了有限赌金对赌徒期望的影响。他证明，在他的假定下，最好的策略是在第一轮硬币投掷中压上所有赌金。

"确实，"他最后说，"这么做的人是傻瓜。我只是证明，不这样做的人是更大的傻瓜。"

92° 计算

库里奇从繁复的计算中找乐趣，那时候还没出现计算机，而用纸来算又太浪费，他就在墙纸上算。

93° 机智与幽默

库里奇的演讲很生动，充满了机智与幽默。有一次，在解释逼近极限的概念时，库里奇说，"对数函数随自变量一起走近无限大，不过显得很不情愿的样子。"

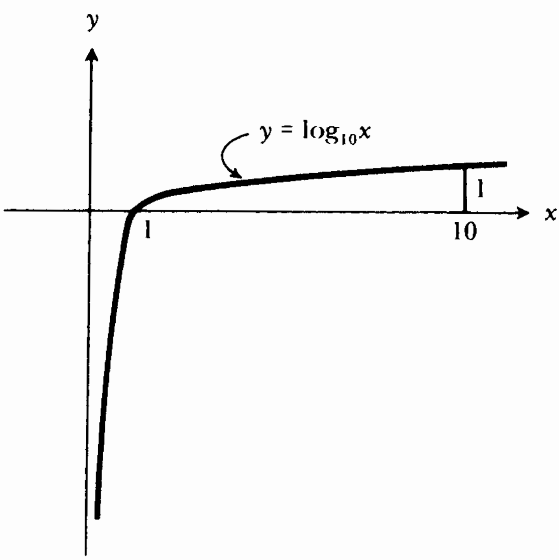


图 8

94° 表的故事

常令人想起的一个故事发生在库里奇的一堂解析几何课上。

他在讲课时，习惯把金表和链子绕在食指上来回甩动。有一次，他使劲儿那么一甩，链子断了，贵重的金表飞过教室，落在窗台上。库里奇赶紧抓住这个机会说，“先生们，那就是一条完美的抛物线。”

95° “莎莎”

哈佛研究生数学俱乐部每月聚会一次，气氛轻松活跃。库里奇喜欢把他的艾尔达犬“莎莎”带到会上来。莎莎总是在地毯上选一个正对着黑板中间的位置，静静躺在那儿听人们接下来的谈话。谈话者可以随便用黑板的两头，中间却被莎莎霸占了。

96° 发现

库里奇曾对他的一个研究生说，数学的优点在于它每解决一个问题都会创造更多的新问题。

更多的数学人的故事

这儿再讲几个著名数学家的故事。故事 101 到 105 改编自波利亚在不同时间对不同人所讲的故事。

97° 几个简单的数学魔术

卡斯纳（Edward Kasner，1878～1955）曾是哥伦比亚大学安德里数学教授，很喜欢和小朋友在一起，经常跑到纽约市的小学去给小学生讲“数学”。

卡斯纳教授的教学方法之一是利用简单的数学魔术来做例子。例如，他拿出 1 角和 5 分的硬币，然后叫一个小朋友来，把

手放在背后，一只手拿一个硬币，但不说哪只手拿哪个硬币。这时，卡斯纳教授就说，“我会告诉你哪只手拿的1角硬币，哪只手拿的5分硬币，同时我还能用简单的算术来考你。找一个伙伴来帮着你检查算术。”

“现在，”卡斯纳教授接着说，“把右手的硬币的数值乘以4，左手的硬币的数值乘以7，但不要告诉我；然后，把那两个数加起来，告诉我这个结果。”两个同学私下计算后，把最后结果说出来。如果结果是偶数，卡斯纳会说，“5分硬币在你右手，1角硬币在你左手。”如果结果是奇数，卡斯纳就说，“5分硬币在你左手，1角硬币在你右手。”

图9



同学们很惊讶，然后又让其他伙伴来玩儿这个把戏，直到他们中有谁能发现奥秘。到期末的时候，孩子们已经学会简单的加法和乘法计算了，同时也了解了奇偶数的一些基本性质。

98° 寻宝

卡斯纳教授给小学生讲“数学”的另一个方法是“寻宝”。他先给同学们讲某个题目的一些基本常识，例如素数和合数的概念。然后，他站在黑板的远端，宣布说要开始寻宝了，而要找到宝贝，必须正确回答几个问题。

接着就提问，诸如“第二个奇数是什么?”“12的最大素数因子是什么?”等等。等同学给出了答案，卡斯纳教授就拿着码尺沿黑板的粉笔槽走那么多步，就这样一直走到黑板的另一端。然后他说，“宝贝就藏在这儿呢。”只见他从黑板角落的一个废纸篓里找出一包巧克力糖果，要把它分发给同学们。

当然，在上课之前卡斯纳教授就把藏好东西的字纸篓放好了。

99° 有趣的判断

高斯非常敬重爱森斯坦（Ferdinand Gotthold Max Eisenstein，1823～1852，在今天以“爱森斯坦不可约准则”而闻名），据说他曾宣称有三个划时代的数学家：阿基米德、牛顿、爱森斯坦。

100° 运动员数学家

哈拉德·玻尔（Harald Bohr，1887～1951）是更有名的大物理学家尼尔斯·玻尔（1885～1962）的兄弟。他不但是著名数学家，还是出色的足球运动员。他曾加入丹麦国家队。他获得数学博士学位时，出现在报纸上的照片就是手拿一只足球。[1]





图 10

玻尔兄弟（左为哈拉德）

1 参见《相约数学圈》S290。

101° 一个心不在焉的数学家

埃里拉（Alfred Errera，1886～1960）很富有，曾为朋友列维（Paul Lévy，1886～1971）举办了一次精致豪华的晚宴。列维是有名的心不在焉的人，第二天，埃里拉正好遇见他，就告诉朋友

说，他昨天晚上非常高兴。列维满脸疑惑，问，“哦，昨晚你在哪儿呢?”

102° 毁灭新数学

罗马政治家和将军加图(Marcus Porcius Cato，234B. C. ~149 B. C.)讲话结束时常说，“顺便说一句，我们要毁灭迦太基。”佩隆(Oskar Perron，1880~1975) 学着加图的样子，在一次教务会上，他在报告的最后说，“顺便说一句，我们要毁灭所谓新数学。”[2]

103° 酒友

几个数学家，舒哈特 (Shohat)、塔玛金 (Tamarkin) 和乌斯宾斯基 (Uspensky)，常聚在一起喝酒。有一次，三个人都醉醺醺了，决定给没来的伙伴打电话。那人是一个大天文台的台长。那时已经半夜，人家说台长睡了。他们一定要说，台长只好起来拿起电话。几个家伙问他，“你拿什么喂那只大熊?”[3]

104° 抓阄

还有一次，刚才说的那几个数学家又喝得酩酊大醉，他们决定抓阄看谁第一个死，谁第二个死，谁第三个死。碰巧的是，抓阄第一个死的人真的先死了，尽管他的年纪是几个人中最小的。若干年后，塔玛金听说舒哈特刚去世时，感到非常惊讶，因为他的死没按抓阄的顺序来。

105° 托马斯·曼的小说

托马斯·曼是德国出生的美国作家，诺贝尔奖获得者，娶了文艺修养极高的数学家普林歇姆 (A. Pringsheim，1850~1941)

2 “新数学”是美国20世纪60年代兴起的小学数学教育(教材) 改革，强调数学本质和精神，没能适合广大学生的理解力，遭到了不少老师的反对，很多人提出要重新“回到基础”。前面也讲过几个“新数学”的故事。

3 因为是对天文学家说的醉话，“那只大熊”大概指“大(小) 熊星座”。这令人想起我们古人的妙想：“维北有斗，不可以挹酒浆。”(《诗经·小雅·大东》)

的女儿。后来，曼写了篇小说。《孪生兄妹》（*Wälsungenblut*），写一个女孩儿把她的孪生兄弟当情人，故事的原型是瓦格纳歌剧院的一对兄妹西格蒙德（Siegmund）和西格林达（Sieglinde）。而曼夫人正好也有一个孪生兄弟，普林歇姆一家担心读者误会小说描写的是自己的家人，于是，百万富豪的岳父大人买尽了所有的小说，还要曼答应不再重印。后来，那本书还是重印了。

106° 记账员与测量员

1806 年发表了一篇题为“试论几何作图中虚量的表示方法”（Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaries dans les constructions géométriques）的论文，本文似乎第一次描述了今天大家熟悉且卓有成效的复数与平面点之间的联系。论文的作者阿尔冈（Jean Robert Argand，1768～1822）是瑞士日内瓦的一名记账员。许多人后来称复平面为阿尔冈平面，是理所当然的。

许多年后，1897 年，一个古董商在研读某些丹麦档案后，发掘出一篇题为“Om Directionens analytiske Betregning”（“论矢量的解析表示”）的论文，已明确提出了复数与平面点之间的联系。文章于 1797 年呈丹麦皇家科学院，发表在 1799 年的科学院《学报》。那篇文章的作者韦塞尔（Casper Wessel，1745～1818）是出生在挪威约斯鲁德（Josrud）的土地测量员。韦塞尔的文章面世 100 周年时，又重印在一家著名的欧洲杂志上，于是欧洲中心的数学家们都知道韦塞尔比阿尔冈领先了 9 年。

后来的历史学研究发现，高斯大概比韦塞尔还早 7 年就知道了复数的几何表示。在高斯 1799 年的博士论文里确实已经看到这个思想了。所以，今天很多数学家都称复平面为高斯平面。

这令人想起另一个历史悬案：博莱、罗巴切夫斯基和高斯，

他们谁第一个发现了非欧几何？

107° 不同寻常的名声

佩尔斯（Benjamin Peirce，1809～1880）对美国早期数学有着巨大影响，他从学生成长为教授，与哈佛学院有着50多年的渊源。不论从事重要的研究，发表有价值的论文，还是向学生灌输研究思想，他都是美国数学家的先驱者之一。从今天来看，他的名声在于是他第一个让当权者认识到了数学研究是美国数学系存在的理由之一。

108° 像数学家一样思考

我们在别的地方说过（见《相约数学圈》S360），许多学者发现，规则的有节律的漫步能刺激思想活动，有助于精神集中——即所谓“双腿是思想的车轮”。庞加莱说，他最好的思想是在不停的漫步中产生的。有个8岁小男孩儿问庞加莱如何“像数学家一样思考”。庞加莱回答，“找一条倾斜的沙土小路，走上去，走下来，然后反复走上走下。数学思想就在脚底的摩擦中产生出来了。”

文学数学点滴

纯文学领域的作者有时也“插足”数学领域。他们的言论，有令数学家欣赏的高明见识，也有遭数学家笑话的概念错误。在几个“圈”里，我们引用了很多那样的言论。现在我们再举几个例子。正如大家所预料的，除了科幻小说外，拿数学作佐料似乎更多出现在侦探小说，而不是其他形式的想象作品。

109° 模仿

“他慢慢检查了所有细节，然后像数学家一样定下心来，解了一个方程。”（迪内森[4]，“带康乃馨的年轻人”，见《冬天的故事》）

110° 时间的函数

欧·亨利（O. Henry）的著名短篇小说《麦琪的礼物》开头三句话是：“一块八角七分。就这么多了。还有六角硬币。”

111° 逻辑结论

“总之，正如马歇尔镇的幽默作家在《前进》杂志专栏中解释的，‘曼顿别墅闹鬼的命题是那个前提的惟一逻辑结论。’”

——比尔思，《右脚的中指》[5]

112° 笔比方根更有用

“别对我说你的阿基米德杠杆。他是个有数学想象力的心不在焉的人。数学令我佩服，但我不需要什么机械。给我一个正确的字眼和腔调，我就能移动世界。”

——康拉德，《私人记录》前言

113° 上限

“［办公室］有间屋子，放着两张椅子和一张桌子，还有一个档案柜。至于人选，谁都可以来，只要不超过三个，只要他们相互喜欢。”[6]

4 迪内森（Isak Dinesen，1885～1962）是 Karen Blixen 的笔名，丹麦作家，先在美国成名，然后名声远播。《冬天的故事》（*Winter Tales*）是 11 篇小故事的集子，她最有名的作品是《走出非洲》，根据小说改编的电影获 1985 年奥斯卡奖。

5 很多人知道《魔鬼词典》，这个比尔思（Ambrose Bierce，1842～1914?）就是它的作者。这儿引用的故事说的是一个十几年没人住的荒屋，院子里“杂草丛生，几棵遮阴的树，一旦刮起风来，就向同一个方向倾倒，似乎想一起跑出去。”在那样的环境下（premises），不闹鬼才怪呢。

114° 最伟大的侦探

在亚当斯（Samuel Hopkins Adams）的短篇小说《最佳办法》里，业余侦探琼斯（Average Jones）及时找到了刺客的枪藏在什么地方，救了州长亚瑟（Arthur）的命。他通过一个信封背面的图，根据子弹偏离的测量，利用三角方法确定了枪的位置。小说最后，满怀感激的州长祝贺琼斯"解决了一个了不起的创造性难题。"[6]

"创造性?"琼斯看着信封背面的图，平静地笑着说，"不，州长，您过奖了。问题是历史上最伟大的侦探解决的，在两千多年前。他的名字是欧几里得。"

6 见 William Bankier，失踪的收藏狂《希区柯克推理文学杂志》，1981 年 4 月。

115° 没有争辩的余地

"很遗憾，我最不喜欢的科目就是数学。我好好想过，我想我不喜欢它的理由是数学没有争辩的余地。如果你错了，那就全完了。"（Malcolm X Mascot[7]）

7 马尔科姆是黑人民权领袖，1925 年 5 月 19 日生于美国内布拉斯加州，1965 年 2 月 21 日在曼哈顿被谋杀。他出生时名叫 Malcolm Little，他认为黑人的非洲姓氏已经被剥夺，所以该姓 X。

116° 复杂的女人问题

"总之，女人是个问题，自打布鲁克先生对它无可奈何，它几乎比不规则固体的旋转还要复杂。"[8]

8 见乔治·爱略特《米德镇的春天》（*Middlemarch*）。

117° 解题

"在乳白色粉墙的另一边，木工店的圆锯唧唧呀呀响不停，在尖利而可怕的啸声中锯下一块块木头。他解决了十道三角题。他解开缠绕在头脑里的结，把它们从联系平面几何与立体几何的长长问题中一个个分离出来，得到答案。"[9]

9 见厄普代克（John Updike）"住房意识"，《鸽子羽毛》。

118° 妙语

美国诗人艾肯（Conrad Aiken，1889 年生于佐治亚州塞芬拿）在他的诗“音乐会”中用了一个精妙的短语：“音乐的纯粹的魅力的代数”。

119° 二加二

“他的内心经过那场恐惧的严峻考验已经孤立了，现在却无言能表达孤独以及与伙伴之间的鸿沟。也许可以向数学家承认二加二等于四，但二不等于一加一；二是一的两千倍。就因为这一点，纵然有千般不好，世界最终还是要回到一夫一妻制。”[10]

120° 正方形

他的脸有点儿方，他的下巴也是方的，他的肩膀还是方的，就连他的外套都是方的。实际上，在当时流行的野派漫画里，比尔博姆（Max Beerbohm）先生就把自己画成欧几里得《原本》第四卷的一个命题。[11]

121° 概率

李耶（Leeyes）警长很不客气地说，“你们已经超过 24 小时了，斯隆（Sloan）侦探。解决一个案件的概率与它发生后的时间成正比，而不是你所认为的反比。”

“是的，长官。”它的根据是什么？“普通人的数学”还是“逻辑”？（艾尔德，《宗教团体》）[12]

122° 数学定律？

“他知道有一个联系时间和距离的数学公式。还没人为两者

10 见切斯特顿，《那个叫星期四的人》。切斯特顿（Gilbert Keith Chesterton，1874～1936）最大的成就是塑造了英国继福尔摩斯之后的另一个著名侦探“布朗神父”。

11 欧几里得《原本》第四卷命题 6，7，8，9 都是关于正方形作图的。见切斯特顿“过道里的人”，《布朗神父的智慧》。（原注）

12 艾尔德（Catherine Aird）是 Kinn Hamilton McIntosh 的笔名，生于 1930 年。她笔下的著名侦探是斯隆（C. D. Sloan）。

之比给一个名称或符号，而时间与罪行的关系也是错综复杂的。距离一个案件写进书里的时间越久，正义的力量也就显得越小，二者是成反比的。”（艾尔德，《伤害之路》）

123° 常识

“我说过的，我能做简单算术。如果琼斯有 8 个香蕉而布朗从他那儿拿走了 10 个，琼斯还剩下几个？就是这类题目，人们喜欢自以为有简单的答案。他们不会承认，首先，布朗不可能做那件事情——其次，答案的香蕉数不是正数！”

“他们宁愿喜欢变戏法儿一样的答案？”

“说得太对了。政治家也那么糟糕。但我总是坚持简单的常识。其实你知道，最后谁也不可能违背它。”[13]

13 见阿加莎·克里斯蒂，《过鬘死亡》。阿加莎·克里斯蒂（Agatha Christie，1890～1976）是公认的“侦探小说女王”，她的小说风行全球，主要作品也都能看到中译本。



图 11

124° 反证法

“这样说来，任何人似乎都不可能了——真是荒唐！”

“正如我们的老朋友欧几里得说的，”波洛嘟哝着。[14]

14 见阿加莎·克里斯蒂，《东方快车谋杀案》。

125° 概率的危险

“我想你是在回避这个问题，”海多克（Haydock）说，“而我可以隐约看见那是一个可怕的概率练习：六个人戴白帽子，六个人戴黑帽子，你得靠数学来回答，这些帽子有多大可能混淆起

来，比例是多少。如果你开始考虑这样的事情了，你也就要疯了。还是让我来替你担保吧！”[15]

15 见阿加莎·克里斯蒂，《打碎的镜子》。

126° 迷人的数学

我继续跟父亲学算术，很得意地学会了分数和小数。最后我迎来了一些有趣的问题：多少牛吃多少草，水塘要多少小时能灌满水——真是太迷人了！[16]

16 见阿加莎·克里斯蒂，《自传》。

127° 反证法

我还记得一个无聊的表姐，都是大人了，还故意逗我说我的蓝项链是绿的，而绿的是蓝的。我的感觉和欧几里得的一样，“真是荒唐，”不过出于礼貌，我没反驳她。[17]

17 见阿加莎·克里斯蒂，《自传》。

128° 欧几里得显灵

邓桑尼（Lord Dunsany）的《幽灵》有段有趣的话，一个精神错乱的人计划谋杀他的兄弟。就在他要行动的关键时刻，他突然想起欧几里得《原本》中“对顶角相等”的命题。他仔细回忆了命题的证明，又回到逻辑和理智的世界；他悬崖勒马，恢复了理智。

福尔摩斯

怀着对柯南道尔塑造的伟大侦探福尔摩斯（Sherlock Holmes）的特殊情感，我们专门拿一节来撷取散发在福尔摩斯传奇里的数学气息。这里忽略了逻辑的东西，它们实在太多了。

129° 相似三角形



捷克画家 Josef Friedrich 笔下的福尔摩斯

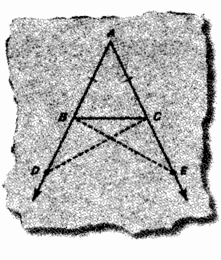
在《马斯格雷夫典礼》中，福尔摩斯确定了一棵早被砍伐的 64 英尺高的大榆树的阴影顶端在一天的给定时刻的位置。他在大榆树以前的位置竖起两根只有 6 英尺长的钓鱼杆，发现鱼杆投下的影子为 9 英尺。于是，那棵 64 英尺高的榆树应该沿着鱼杆影子的方向投下 96 英尺的影子。

130° 训练有素的观察者的结论

《血字研究》第二章说，福尔摩斯曾写过一篇题为“生命之书”的文章，文章最后说，一个对观察和分析训练有素的人的结论应该“像欧几里得的众多命题那样确实可靠。那些结论会令没有经验的人惊愕，但等他们了解了思想的过程，就会把他看成巫师。”

131° 浪漫的欧几里得命题

在《四签名》第一章里，福尔摩斯承认，他仔细读过华生在《血字研究》里讲述的他对侯波（Jefferson Hope）一案的破解，但他给朋友泼了凉水，告诉他，“我大略看过一遍。可是坦率地讲，我实在不敢恭维。侦探术是或者应该是一门精确的学科，应该以冷静的不带感情的方式来看待。你试着给它点染了罗曼蒂克的色彩，给人的感觉就像你在欧几里得第五命题里塞进了一个恋爱或私奔的故事。”



“驴桥”问题

［欧几里得第五命题证明等腰三角形底角相等，即著名的 pons assinorum，“驴桥”，指命题的图形像一座桥，也因为许多初学者感到很难“渡过”它。］



Sidney Paget 笔下的福尔摩斯和华生

132° 三率法则

《四签名》中还有一处说数学的，见第六章。一个叫汤加的小脚安达曼岛人不幸踩到了木馏油，也就很容易跟踪他了。福尔摩斯说，“我知道有一条狗能追着那气味跑到天边。如果说一块浮冰能跨越一个郡赶上掉队的鲱鱼，那么一只特殊训练的猎犬追踪那么强烈的气味不是更容易吗？那就像一道三率法则的习题。”[18]

18 三率法则说的是，已知三个数 a, b, c, 求第四个数 x, 使比例 $a:b=c:x$。（原注）参见《走进数学圈》93。

133° 莫里亚蒂教授与多项式定理

在《最后一案》中，福尔摩斯在描述他的强敌莫里亚蒂（James Moriarty）教授时说，“他的经历非同一般。他出生高贵，受过极好的教育，有着非凡的数学才能。21 岁时，他写过一篇关于二项式定理的论文，风行欧洲。他凭着这篇文章在我们的一所不太有名的大学里谋得了数学教授的位置，而且从各方面看，

他都是前途无量的。”[19]

19 许多著名数学家，包括牛顿，都和二项式定理有渊源。[19]（原注）

134° 莫里亚蒂教授与“小行星动力学”

在《恐怖谷》中，华生说过莫里亚蒂教授的坏话，福尔摩斯回答说，“可一般的人一点儿也不怀疑他，也没人能指责他，他隐藏自己的本领也真令人佩服。凭你说的那些话，他就可以把你拖上法庭，罚你一年的退休金来补偿他的名誉损失。他不是《小行星动力学》的作者吗？那本书是罕见的纯数学杰作，据说科学界没有一个人敢批评它呢。信口开河的博士和被恶意诽谤的教授——这将是你们各自的角色！他真是个天才啊，华生。但只要那些小喽啰伤害不了我，我就有出头的一天。”

歌　　谣

其实，编一本相当篇幅的书来专门汇集说唱数学和数学概念的歌谣，也不算困难。前几本《数学圈》已经有过一些例子了，下面再增补一些。

135° 在一本大学数学课本里发现的小诗

如果再来一场洪水，[20]
就飞到这里躲藏；
纵使世界一片汪洋，
我书依然无恙。

20 诺亚方舟已经遭遇过一场洪水了。

136° 相对论

不论我们怎么生活，

生活的价值都是相对；
听叹气的蜗牛诉说，
“看海龟从身旁飞过。”

137° 椭圆积分[21]

一个数学家叫尼克，
积分是他的娱乐，
　　可一段椭圆弧
　　给他留下了颜色，
他再也无法把它清除。

21 椭圆积分是不能得到简单表达式的。

138° 桥

人们说哈米尔顿赢得了欢呼，[22]
他曾在桥上刻下方程；噢，好啊，
如果你我现在也来刻画，
我才不想惹出可怕的麻烦；
警察会来把我们拘留，
在桥上涂写可是一种罪过。
就算真的可以画了，也不值得一做——
算是发表吗？没有那样的说法。[23]

22 哈米尔顿在桥上刻公式的故事，见《走进数学圈》(338)。

23 见《二年制学院数学杂志》，1979年1月。

139° 关于纯数学

如果是纯粹的，它就没有病菌；
如果没有病菌，它就没有生命；
如果没有生命，它就死了；
如果死了，它会腐烂；

如果腐烂，它就臭了。（一个过去的学生）

140° 三段论法则

If there be righteousness in the heart,
There will be beauty in the character.
If there be beauty in the character,
There will be harmony in the home.
If there be harmony in the home,
There will be order in the nation.
If there be order in the nation,
There will be peace in the world.[24]

24 这段诗句大概应该是《大学》里的几句：心正而后身修，身修而后家齐，家齐而后国治，国治而后天下平。

141° 情人节的小诗

你是我的小精灵，
让我来做你的主人。
我爱你就像“1”除以“x”，
当“x”趋近于零。[25]（Michael A. Stueben 提供）

25 $1/x\to\infty$（当 $x\to 0$ 时。就是说，我的爱无穷大。

142° 香克斯的错

香克斯说要把 π 算到
七百零七位，
没人反对那值得一试。
可他错了一零八。[26]

26 见 Nicholas J. Rose，罗马出版社 1985 年数学年历。参见《重游数学圈》R44。

143° 都等于空集

荒野的人问我

海里长着多少草莓。

我想了又想，回答他

和森林里的红青鱼一样多。[27]

27 “红青鱼”的原文 red herring 也指“不相干的事实或论点”。

144° 打油诗

虽然资源丰富，

芝加哥的数学力量

还总拿一个 Zorn 引理

来装点它 90% 的课程。[28]

28 佐恩引理是“选择公理”的一个等价命题，1935 年佐恩用它来证明选择公理。

145° 计算的机器

我厌倦了那机器，

我愿他们把它卖了。

它从不会做我想做的，

只做我让它做的。

146° 悖论

那悖论的形式多奇怪——

她凭常识就笑开了怀。(W. S. Gilbert)

147° 深入真相

生物学家把细胞分析，

化学家将分子摆弄，

物理学家把原子打碎，

数学家把点理想化。(Ray Bobo)

148° 真理与信仰

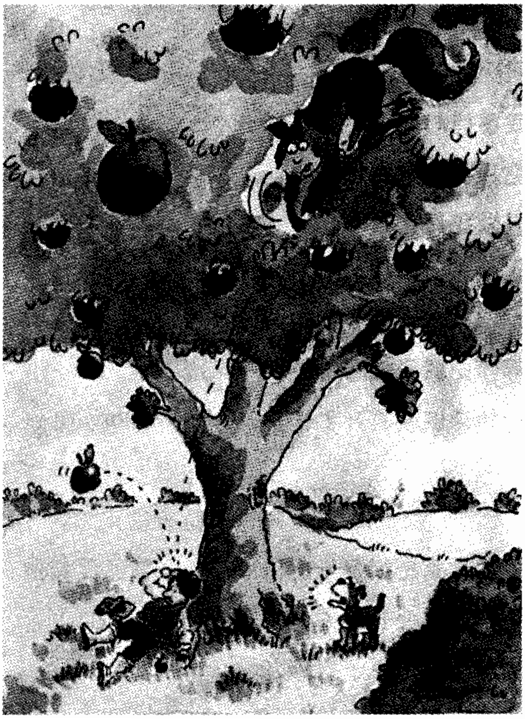
怀疑一般是信仰，而信仰总是怀疑；
我们不能靠证明来相信，但没有证明还能相信吗？

一加二不是一，但一加零等于二；
真理不可能是假的，只要假不会成真。[29]

29 作者史文朋(Algernon Charles Swinburne, 1837～1909)，英国大诗人，雪莱后的第一个抒情诗人，他的诗格律极美。他有句名诗说："除了自己的心灵，便无引路之星。"

149° 牛顿与苹果

当牛顿见苹果落下，
他发现地球转动的模式——



Paige Keiser 的漫画《牛顿与苹果》

那是最自然的飞旋，它叫引力。
这就是惟一的人物，在亚当的身后，
能抓住那下落的果实。[30]

30 作者拜伦（Lord George Gordon Byron，1788～1824），就是那个写《唐璜》（*Don Juan*）的英国浪漫主义大诗人。

150° 打油诗

乔治布尔
绝非傻瓜；
可别忘记
他的数学故事是空集。[31]

31 见 Robin Harte，美国数学月刊，1985 年 11 月。

151° 反演变换

一个黑女孩儿，
微笑着骑在虎背；
　　当他们旅行归来，
　　女孩儿在虎肚里，
微笑留在虎的眼眉。

152° 所有属于自身的集合的集合

潮水冲来一只盒子，
罗素感到万分羞愧，
　　他话里带着后悔，
　　“哎呀呀，所有属于自己
的集合的集合在那盒子里。”[32]

32 罗素关于集合的感叹，可以通俗表达为著名的“理发师悖论”：一个理发师说他只为不给自己理发的人理发，那么他是否该为自己理发呢？见 Paul Ritger，罗马出版社 1986 年年历。

153° 阿基里斯和乌龟

当芝诺年轻的时候，

对乌龟的奔跑发生了兴趣，
他向阿基里斯挑战，
人说他还不知道
谁能跑到前头。[33]

154° 整数

关于整数，有那样的说法，
不论买卖了多少，
不管送走了多少，
剩下的依然无限。

155° 螺旋之歌[34]

一个运动的实体，
或者一个刚性的物体，
不论处在什么条件下，
像一个螺旋，必然处于两种状态。
它旋转也滑动——
这是我歌唱的主题。

螺距，乘以旋转的角度，
等于平动下滑动的距离。
平动发生在无限的螺距，
零螺距意味着纯粹的转动。

一根螺旋式的保险丝，
经历两个给定的螺旋运动，
随意地旋转、平移，

33 见 Paul Ritger 罗马出版社 1986 年年历。

34 这支歌谣见 Memorabilia Mathematica or the Philomath's Quotation-Book, Robert Edouard Moritz, 1914, pp. 320 ~ 322. Republished as On Mathematics and Mathematicians, Dover 1958. 也见 Carolyn Wells 收集的 "A Nonsense Anthology", Dover, 1958, 是 Scribner 1902 第一版的重印。这首诗算得物理学的一首"名诗"，还有的大学老师喜欢在晚会上朗诵它呢。诗的内容概括了螺旋理论的基本概念，这个理论现在是高等机械结构的基础，在机器人等技术有着基本的作用。最后提到的鲍尔(Ball)博士写过一本经典的螺旋理论：*A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, 1900.

　　它运动的最后距离，
用平行四边形来度量，
（这是当然的逻辑。）

转轴切开与两个螺旋
　　方向垂直的节线，
生成一个可爱的图形，
　　它的正规名字
是“第三度确定的曲面，”
我给它的名字是拟圆柱（cylindroid）。

绕着一定直线的旋转，
　　仿佛一个力在作用。
如果谁说那是力偶，
　　那你肯定走错了路；——
直线当然不仅是一个方向，
要把反射也算上。

平动的力偶，
　　所有方向都相等；
于是，螺旋的核心
　　存在运动与静止的
惊人的和谐——
那是数学最可爱的奇迹。

作用在一定螺旋的力，
　　和另一个螺旋的运动，
一般会做一定的功，

功的大小取决于
角度、力和所谓的有效系数。

旋转现在转化为力，
力也转化成旋转；
不变的是功，无论是否平动，
我们都这样断言。
如果两个螺旋没有做功，
它们就是相反的螺旋。

五个数决定一个螺旋，
六个数决定一个螺旋的运动；
因为需要四个来决定轴线，
更多一个才能定下螺距；
于是总可以设计一个，
与五相反的螺旋。

螺旋，从二到五（这里不管六），
组合成的螺旋，
生成约束在一个螺旋系
的其他螺旋。
于是我们明白了一个概念，
运动有自由也有约束。

在三系的每一点，
你能找到三个螺旋，
随便选择一个方向，
总有你心中的螺旋；

三阶的螺旋系
也可能和自己相反。

在四系的任何地方，
　　你都能找到螺旋锥。
五系的每一条线上
　　只有一个螺旋；
在它的每一点，
螺旋面有一定的螺距。

关于阶和度，
　　关于冲量、能量和力，
还有螺旋的相反性质，
　　我没有时间更多地谈论。
所有的一切和运动，
请鲍尔博士来诉说。

计算机与计算器

有许多关于现代电子计算机和计算器的故事和笑话，似乎都在贬低和嘲笑它们的神奇功用。这种态度或许反映了经常伴随着无知和不理解的怀疑和恐惧。

156° 老借口

我们喜欢取笑旧时的记账员，他们坐在高高的凳子上，拿着大羽毛笔，小心翼翼地一笔笔地记录数字。但我们从没听到过这样的借口："我们的计算机崩了。"



图 12

157° 重要的日子

1971 年 9 月，第一台袖珍计算器在市场出现了；印第安那州福特维恩（Fort Wayne）的鲍玛尔（Bowmar）仪器公司摆出了一台 3×5 英寸大小的样品，售价 299 美元。

鲍玛尔很快有了大量伙伴。在一年半的时间里，十几家公司都在商场卖他们的计算器。由于竞争火爆，价格陡降。到 1972 年圣诞节，最便宜的计算器标价降到了 100 美元以下，商场还能打折。一年后，价格低于 50 美元，而现在 10 美元就够了。到 1974 年，计算器年销售额达到了 1000 万美元。

因为计算器越来越便宜，电池设计者们也把电池缩小到信用

卡那么薄。今天，计算器也许是第三或第四大消费品，年销售额超过了5亿~7亿美元。[35]

35 《班戈每日新闻》1981年9月19~20日。

158° 课堂上的计算器

1979年，全国数学教师理事会对教育学老师和领导者进行调查，发现他们对课堂使用计算器很有保留。理事会理事长盖茨（James D. Gates）说，一般都赞同用计算器检验家庭作业，仅此而已。

“人们感觉小孩儿会拿计算器做帮手，”盖茨说，“老师们仍然十分谨慎。还没有足够研究能肯定它不会影响孩子们的数学技能。”

俄亥俄州立大学计算器信息中心主任苏达姆（Marilyn N. Suydam）认为情况并非如此。照苏达姆小姐的说法，有近100项研究证明，计算器的使用既不会影响也不能提高数学成绩。

“计算不是问题，”她说，“多数孩子两三年就掌握计算了。孩子们的问题在于解决问题——即用计算技能来解决问题。”

苏达姆小姐说，是否在课堂上用计算器，最后成了一个实践问题，通常由老师们自己去决定。[36]

36 《班戈每日新闻》1981年9月19~20日。

159° 最新（1986）广告

锡拉库扎大学开设完全由计算机讲课的教师班。

160° 鲜为人知的趣事

大家都知道，巴贝奇在几笔政府资金资助下，用了生命的多数时间（37年）来研制他的分析机。但很少有人知道，大诗人拜伦的惟一合法女儿、拉夫罗斯（Lovelace）伯爵夫人阿达

(Augusta Ada Byron) 还为它编写过程序——据说是为了更好地赛马。

161° 计算大赛

在澳大利亚举行的一次计算器和中国15世纪算盘的计算大赛中，算盘以10比9获胜。

162° 真正的危险

我们技术时代的真正危险不在于机器可能变得像人一样思想，而在于人开始像机器一样思想。(Sydney J. Harris)

163° 劝诫故事

一个流体力学专家读一篇从俄文翻译过来的研究论文，不明白"water sheep"（水羊）指的是什么。后来才知道，文章原来是计算机翻译的，那个词本该是"hydraulic ram"（水压抽水机）。[37]

164° 语言计算机

让一台语言计算机解释这样一句话："He was bent on seeing her." 机器写出来的是，"The sight of her doubled him up."[38]

165° 特殊程序

因为计算机存储空间是由小程序集成的，系统程序员写了一个程序来找出那些很少使用的程序，要将它们删除。运行时，程序真的尽职尽责地寻找那些少用的程序——最后果断地把自己删除了！[39]

37 Ram 也有"公羊"的意思，机器把它译成了"sheep"（绵羊）。

38 原句意思是"他决心要见她。"机器的理解是，"看见她时，令他弯下了腰。"因为"bent"有"弯曲"的意思。

39 见 Thomas R. Davis《二年制学院数学杂志》，1979年1月。

166° 儿子对父亲

“你当然可以说算术很容易，因为你是在脑子里算的——而我得用计算机！”[40]

40 见 George Levine，《国家调查者》。

167° 要点

有人制造了几台能回答问题的机器，不过要预先把问题储存在里面；而他从来不会造能提问的机器……为了发现问题的正确答案，如果能提出恰当的问题，就等于成功了一半。（Tom Watson，Jr.）

168° 手指算法

“Chisanbop”是朝鲜话，意思是“手指计算法”，是韩国著名数学家裵成镇（Sung Jin Pai）在20世纪50年代构想的。他的儿子裵汉荣（Hang Young Pai）1976年刚到美国，就开始在纽约给韩美学校的孩子们讲这种方法。他默默无闻地教他的指算法，几乎没人注意。后来，一个很偶然的机会，有个叫里贝塔尔（Edwin Lieberthal）的市场经理知道了他的工作。

在“今日”和“今夜”演出会的示范表演中，小学生们用指算法准确计算了四位和五位数的连续加法，和电子计算器一样快，甚至超过了一个用便携计算器的大学数学教授。

指算法的基础是，给两个手的手指指定数字，这样就把1到99的数轻松“掌握”在手，从而进行算术运算。

图a示意了每个手指代表的数字。通过拇指和其他手指的弯曲组合，就能代表从1到99的任何数字。

图b是一个简单的算例：18与16相加。首先，将左手食指

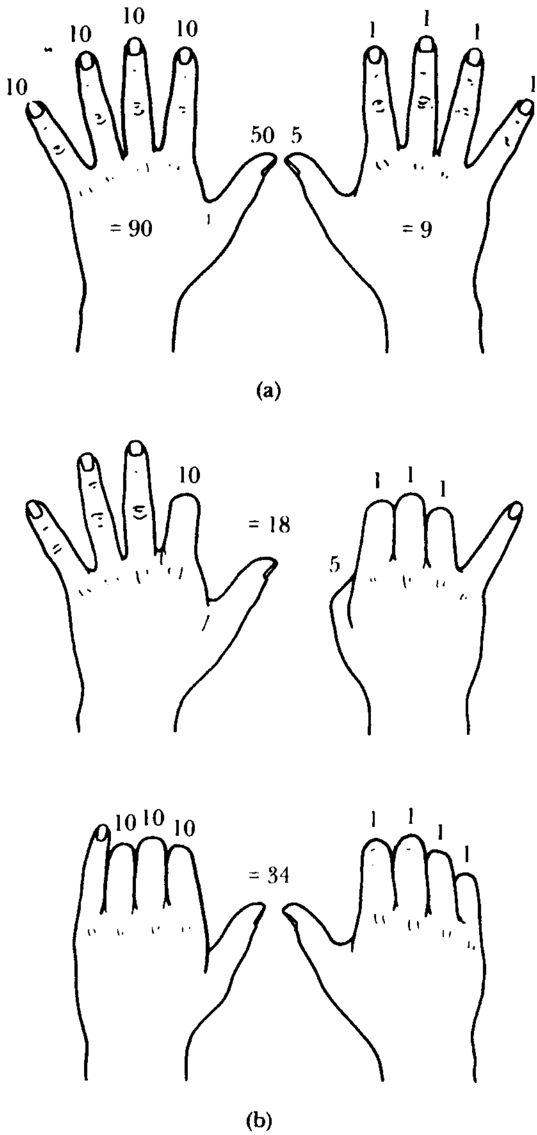


图 13

和右手拇指、食指、中指和无名指弯曲，代表18。为了加16，考虑加10加5加1。将左手中指弯曲，表示加10，刚才弯曲的手指继续保持弯曲。现在交换两手，张开右手拇指，减5；然后弯曲左手无名指，加10。这样就等于加5了。最后，为了加1，弯曲右手小指。从两手的手指形状，就可以读出答案。[41]

41 改编自 Ruth Foster 发表在1978年7月8日《家庭周刊》上的一篇文章。(原注)

169° 计算机程序第一第二定律

1 决不相信未经过完全调试的任何程序；

2 没有一个程序经过了完全调试。

代　数

170° 代数法则

有的同学抱怨那么多的代数法则限制了他们的思想，为了说服他们，老师讲了一个风筝的故事。有只风筝想着把自己的尾巴剪掉一半，那样它就可以更自由地在天空翱翔了。等尾巴真的剪成了两半，风筝也就一下子从天上落下来了。“孩子们啊，”代数老师告诫说，“尾巴没有妨碍风筝，而是在帮助它飞翔。代数法则也是这样的，它们不害你，而是帮你。”



图14

171° 符号

符号有用，是因为它把事情弄得更难了。浅显往往是正确的敌人。所以，我们必须发明一种晦涩的符号系统，其中没有一样东西是显而易见的。我们已经表明，整个算术和代数需要三个不能定义的概念和五个不能证明的命题。[42]

172° 博士的口试

一个特别考试委员会里坐着一个老代数学家，都知道他爱提一些特别令人难过的问题。他问一个研究生："给出三个本质不同的代表直线的方程。"学生想了会儿，说他只想到了一个，$y=mx+b$。教授讽刺说，"好了，还有对数纸上的 $y=\log x$ 和对数对数纸上的 $y=\log\log x$。"这时候，一个年轻的教授插话说，"对呀，还有 f 纸上的 $y=f(x)$！"[43]

173° 另一个博士口试

老师要研究生构造一个不是 UFD 的整环。学生回答说，"$\sqrt{-5}$扩张的 Z。"主考问他为什么，学生回答说 6 不是惟一因子分解的。老师要他"给我们一个分解。"学生写的是 $6=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$。当老师要他给出另一个分解时，学生竟一时不知所措了！[44]

174° 讨厌对数

每个人都知道（或者，至少他们在有了便携计算器之前曾经知道），计算两个大数的乘法，是件讨厌的事情，利用对数可以将它简化为一个无聊的加法问题，两个加数可以轻而易举地从

42 见罗素《国际月刊》，1901 年。

43 所谓"f 纸"应该是一种坐标纸，它的坐标都以函数 f 的值为单位，所以函数 f 的图形画在这种纸上是直线。当然，实际应用的大概只有对数纸，其他纸不过是教授们的玩笑。见 Robert J. Kleinhenz《二年制学院数学杂志》1979 年 1 月。

44 UFD 即"惟一分解整环"（unique factorization domains），可简单理解为寻常整数（构成"整环"Z）的推广。我们知道，在寻常的整数范围内，因子分解是惟一的。至于 6 的另一个分解，当然是 6 = 2 × 3 啊！见 Robert J. Kleinhenz《二年制学院数学杂志》1979 年 1 月。

对数表中找到。我们的许多阳光的青春岁月都被这样的劳作浪费了，因此有些人仿佛和对数结下了深仇大恨。[45]

175° 常用对数多少钱？

去年夏天，在纽约长岛阿曼甘塞特（Amagansett）的一家商店橱窗里，在“皇家橡树速燃煤炭”的展示品旁边，有一块牌子写着

NATURAL

LOGS

49 ¢ each [46]（韦恩）

176° 我明白

老数学教师从来不死，他们只是不停地乘。[47]

177° 哦！

老会计永远不死，他们只是失去了平衡。[48]

178° 加法和减法

如果你想让人快乐，不要增加他的拥有，而要减少他的欲望。(Seneca)

179° 名字里有什么？

韦恩：拿我以前的病人为例吧，且称他为 X 先生。

舒斯特：为什么？

韦恩：那好，我们就叫他 Y 先生吧。现在，Y 先生，也就是从前的 X 先生……[49]

45 见 N. David Mermin“对数！”《美国数学月刊》1980 年 1 月。

46 招牌的意思是“天然原木，每节 49 分”，而“natural logs”可以别解为“自然对数”，所以标题会提那样的问题。

47 原文 Old math teachers never die, they just multiply. “die”还有“中止”的意思，除不尽时就不能中止，所以他们只做乘法；而“乘法”(multiply)又有繁殖的意思。类似的笑话还有：

Old math teachers never die, they just reduce to lowest terms; Old mathematicians never die, they just disintegrate; Old mathematicians never die, they just go off on a tangent; Old mathematicians never die, they just lose some functions.

180° 多贝尔定律

48 这句话的意思是，老会计总也算不完，因为他们的账目收支不平衡。

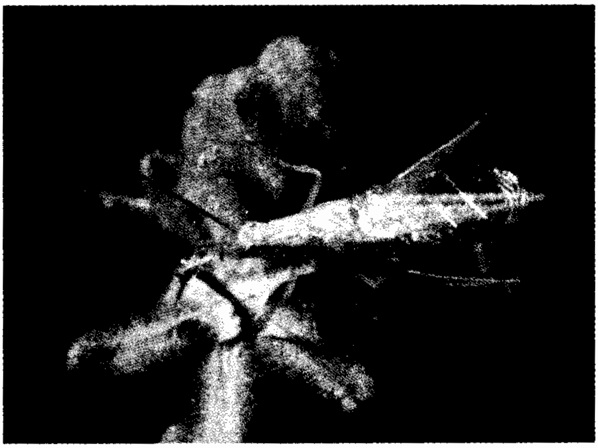
49 见韦恩与舒斯特的电视小品。

我们已经知道，蟋蟀的鸣叫频率随温度而改变。于是，我们可以根据蟋蟀的声音来计算温度。这个想法是图福茨（Tufts）大学物理学教授多贝尔（A. E. Dolbear）在1897年第一个提出的。在一篇题为“作为温度计的蟋蟀”的文章里，多贝尔教授提出了如今被称为“多贝尔定律”的公式：

$$T = 50 + (N - 40)/4$$

这里 T 代表华氏温度，N 是蟋蟀每秒钟的鸣叫次数。

不同品种的蟋蟀有不同的鸣叫频率，后来的考察对不同物种提出了不同公式。例如雪树蟋蟀，它的鸣叫响亮清越，和谐动听。只要数一数它在每分钟的颤动次数，除以4，加40；或者，数它在15秒内的颤动，加40，就得到环境的温度了。科学家们还会通过提高雄蟋蟀笼的温度来引诱不同种类的雌蟋蟀。



鸣声最好听的雪树蟋蟀（学名 *Oecantus fultoni Walker*）

第三象限

从不可能的几何

到归纳问题

几　何

181° 不可能的几何

一家大百货公司卖一种圆基座烟火探测器，圆的直径为 7 英寸。安装说明书说，探测器在墙上的位置应该满足，“天花板距离圆顶至少 6 英寸，而距离圆底不得超过 12 英寸。”

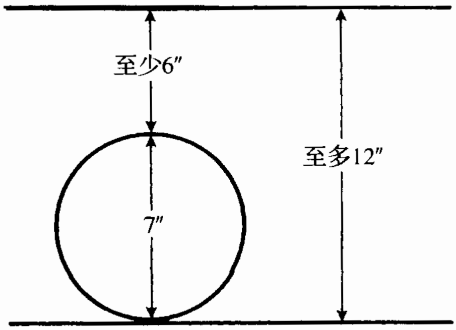


图 15

182° 政治几何

前国务卿基辛格（Henry A. Kissinger）曾说，中国和美国虽然在很多领域坚持自己的不同主张，“在利益相交的问题上还是可以追求平行的政策。”[1]

1 这样说，是为了突出“相交”与“平行”的对比产生的数学趣味。

183° 给几何学生的忠告

在好听的理由与听起来好的理由之间，存在着巨大的差别。

184° 大金字塔与 π

埃及大金字塔的一个未解之谜是，金字塔正方形基底边长的

两倍与金字塔高度之比是非常精确的 π 的近似值。有人猜想，埃及人在造金字塔时就已经考虑了这个比值。而希罗多德指出，金字塔的建造满足每个侧面的面积等于以高为边长的正方形面积。其实可以证明，如果真像希罗多德所说，则那个比值自然是 π 的近似值。[2]

2 有兴趣的读者可以算一下，那个比值等于著名的黄金比(0.618)的平方根的4倍，约为3.1446。

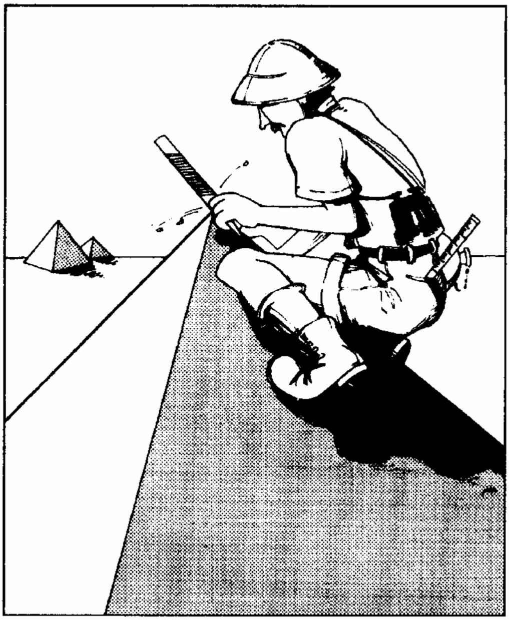


图 16

185° 热心的金字塔专家

著名考古学家皮特里爵士（Sir Flinders Petrie）对大金字塔进行了非常精确的测量，他报告说，他曾抓住一个金字塔专家，那人为了使测量满足自己的理论，竟偷偷把突出的石头给锉掉了。

186° 圆的定义

有人说，马克·吐温曾把圆描述为有洞的直线。

187° 为什么学数学

有个学数学的学生，像很久以前的那个欧几里得的学生一样，问他的教授，“这些东西究竟能有什么好处呢？你得到了什么？”

教授静静地回答，“它的好处就在于让你感觉在爬山。”

“爬山？”学生不以为然，反问道，“那又有什么用呢？”

“为了寻找新的山去爬，”教授说，“当你对寻找新的山峰不再感兴趣，生命也就结束了。”

188° 为什么自找麻烦

一个学几何的学生问老师，为什么学生在几何中必须只用直尺和圆规甚至只能用其中的一种来作图？

老师回答，他想起一个老太太，她在网球赛中老看见球打在网上，愤愤地说，“为什么不把网子拿走？”

有的人不能理解障碍和反对的价值，他们从未认识到战胜重重困难而赢得的快乐和满足。

189° 图书和第四维

图书无言，不会突然失去功能，也不会屈从于崎岖的道路和狂暴的风雪。图书的广告永不停歇。图书小巧而便于携带。从纯粹的唯物主义观点来看，它们是三维的，有长、宽和厚，但它们存在于无限的第四维的时间长河里。

190° 一本几何书

说起自己的书，数学教授对一个学生说，“那是一本了不起

的好几何书，你读过吗？你怎么看它？”

“只有一点好处可以说，”学生回答，“我的一个朋友把它放在胸前的口袋里去打仗。一颗子弹打中了他的肋骨，是那本书救了他。子弹没能通过第一节最后的问题。”

191° 距离问题

我不信老天有什么特别的眷顾。一头骡子踢了人，把他踢到好几米开外，我并不认为那是上帝的旨意；我对自己说，“是那人离骡子太近了。”

192° “三关语”

据说，英文里惟一一句“三关语”是：一个寡妇把她的大牧牛场交给孩子，将它命名为“焦点”——孩子们养牛的地方。[3]

3 A window, giving her cattle ranch to her boys, named it Focus—where the sons raise meat.

193° 老故事

年轻气盛的亚历山大大帝跟老师梅内克缪斯（Menaechmus）学习，发现学数学好慢好烦人。他一定想过，在他征服世界的过程中，梅内克缪斯的圆锥曲线能在战场上发挥什么作用吗？［现代枪炮制造科学就是以圆锥曲线的知识为基础的。］

194° 所以然

一个古老的故事很好地说明了几何是如何透过表面现象走向深入的。欧几里得之前，有个勤奋的学生证明三角形两边之和大于第三边，人家嘲笑他其实并不比一头驴懂得更多。每头驴都知道那个事实，大家也都看到了，驴总是径直走向草堆的。不过，那学生还是有充分的理由来反驳：“是的，可驴不知道那是为

什么。”[4]

4 见 W. B. Frankland《欧几里得的故事》，Hodder and Stoughton，1901。

195° 进步

据说，几何的开端与土地的测量有关，而它今天还同样把握着天体的问题：它把自己的领地扩展到了宇宙空间的边缘。

——《欧几里得的故事》，Hodder and Stoughton，1901

196° 比例

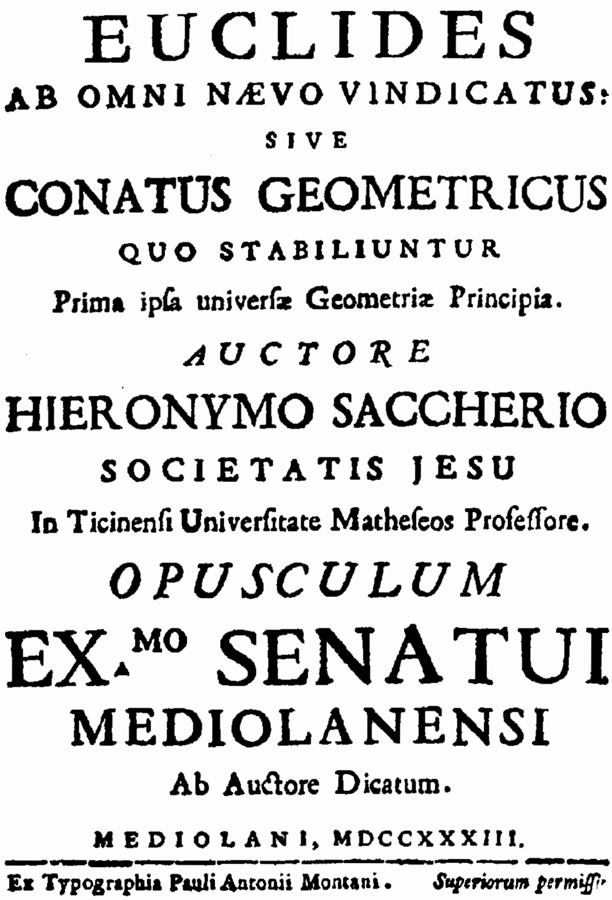


约翰逊的英语词典（Thomas Hugo 木刻）

普罗克洛斯比欧几里得等于鲍斯维尔比约翰逊。[5]

197° 美人鱼

萨卡里的《欧几里得无懈可击》[6] 有一个残缺的结尾，罗森鲍姆（Bob Rosenbaum）评论说，“它令我想起美人鱼，躯干很美丽，可惜长着鱼的尾巴。”



EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipſa univerſæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſore.
OPUSCULUM
EX.^MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permiſſ*

《欧几里得无懈可击》封面

5 普罗克洛斯（Proclus Diadochus，411～485）虽然不是创造性的数学家，却是敏锐的解说者和批评家，熟悉从泰勒斯到当时的1000年间的几何。他的《欧几里得评注》是我们了解古希腊几何的主要思想来源。约翰逊（Samuel Johnson）是大文豪，独立编纂了第一部英语词典，鲍斯维尔（James Boswell）为他写的传记，是传记文学的里程碑（参见《告别数学圈》A92）。

6 Gerolamo Saccheri 在1733年发表过一本关于欧几里得几何的书，题目是 *Euclides ab omni naevo vindicatus*（“欧几里得无懈可击”）。他假定平行公设是错误的，从而导出矛盾。

198° 距离的度量

不同文化形成不同的距离度量方式。例如，有些美洲印第安人以走完距离需要的天数来度量那个距离。在老挝，距离是用煮饭的时间来度量的。

199° 老定义

几何学家：一种毛毛虫。

（一部老词典）



图 17

200° 学术界的狂人

一个没上过学的人费尽心力去三等分任意角、化圆为方、将立方体加倍、证明平行公设、发明永动机或抗引力屏，一点儿也不奇怪。一个当选的政治家（很多那样的人）想做这些事情，就更不奇怪了。可是我们一定会奇怪，一所著名大学的校长竟然也做过那些事情。

1931 年，匹兹堡迪肯（Duquesne）大学校长卡拉汉神父（Reverend Jeremiah J. Callahan）发表了一个“证明”，证明爱因斯坦的相对论是错误的和毫无意义的。“证明”的思路是神父在纽约地铁上突然想到的。因为相对论是在非欧几何的背景下发展

起来的，所以，在卡拉汉神父看来，为了否定相对论，只需要证明非欧几何存在逻辑矛盾，而这一点可以通过从欧几里得几何的其他命题导出平行公设来证明。于是，1931年，卡拉汉神父出版了一本310页的书来推导平行公设，书名叫《欧几里得还是爱因斯坦?》，从这本书里，任何一个几何学者都能轻而易举地发现神父证明的谬误。[7]

同年，迪肯大学出版了卡拉汉神父写的一本小册子，他在书中用直尺和圆规完成了对任意角的三等分，而且宣布他正在做化圆为方和倍立方的研究。1940年，62岁的神父从校长岗位退休。

7 人们为了用欧几里得的其他命题来证明平行公设，经历了两千年的失败。最后发现否定平行公设不会带来矛盾，而会产生新的几何——即各种形式的非欧几何。卡拉汉神父不过是重复过去的失败。今天还有所谓科学家做着类似的“挑战牛顿和爱因斯坦”的事情，我们也不必感到奇怪。

201° 三分角者

三分角者几乎是听不进什么道理的。因为他们的事情本来就没有道理，所以也不能靠逻辑来说服。

202° 忠告

千万别傻乎乎地与三分角者讨论什么问题，旁观者还以为你自己是傻瓜呢。

203° 格里菲斯的故事

格里菲斯（Andy Griffith）讲了一个西弗吉尼亚乡下人的故事，一点点地攒钱供儿子读大学。儿子回家过圣诞节时，父亲问他是不是知道学校的一些事情。

“哦，知道的。”儿子回答。

“那好，”父亲说，“给我举一个例子吧。”

“好啊，”儿子说，“我学会了 πr^2。”

“馅饼是方的?”[8] 父亲吃惊地问，“馅饼不是方的；馅饼是圆

8 πr^2读音同“Pie are square”，

的。玉米饼才是方的呢。”

204° 真理

所有几何推理最终的结果都是循环论证（circular）。[9]

9 见罗素《几何基础》，剑桥大学出版社，1897。

205° 另一个真理

几何是在错误图形上进行正确推理的艺术。[10]

10 见波利亚《怎样解题》，普林斯顿大学出版社，1945。

206° 什么是曲线?

本来人人都知道曲线是什么，可当他学会足够多的数学以后，数不清的例外却使他糊涂了。[11]

11 见克莱因《论数学》，Robert Moritz 编，Dover，1958。

207° 也许

也许可以把解析几何看做欧几里得认为不存在的那条几何的皇家大道。[参见《走进数学圈》67。]

208° 测地线

恐惧之路就是离失败最近之路。[12]

12 “测地线”就是距离最短的路线。胆战心惊走路，当然不会走向成功。

209° 方人

我们不需要任何更圆滑的人。那样的人现在已经太多了。圆滑的人就像一个球，从哪个方向推，他就一直朝那个方向滚下去。我们需要更多的方人，即使推他，他也不会滚。（Eugene Wilson）

210° 世界为什么是圆的?

世界是圆的，是为了让友谊来包围它。

数

211° 德国的小孩

我从欧洲回来，想着德国的家庭真是好大。原来，我曾多次问德国人是否有小孩儿，他们常回答说“九个”。[13]

13 德国人回答“Nein”（没有），发音近似英文的“nine”（九个）。

212° 德国的马提尼酒

一个美国商人走进西柏林的一家酒吧，要了一杯干马提尼酒。侍者显得很疑惑，美国人又重复了一遍：“干马提尼。”侍者耸耸肩，为他拿了三杯马提尼。[14]

14 “干”（dry）的发音近似德语“三”（drei）。

213° 在奥地利滑雪

在奥地利因斯布鲁克冬季奥运会上，滑降比赛时，发令员先喊“一，二，三，四。”赛前风雪漫天，一个美国选手对另一位说，“除了老四，我们没什么可怕的。”[15]

15 德语“四”（vier）在英语中是“对手”的意思。

214° 10 亿有多大？

一个人如果从耶稣诞生那天起，每天花 1 000 美元，那么到今天（1987 年）他还花不了 10 亿美元。实际上，还差得远呢。还剩下四分之一没用——每天 1 000 美元还能花 750 年。

215° 不能不知道的定律

美国有 200 万条法律，如果每天熟悉十条，那么，只需要短短的 6 000 年，你就能成为一个合格的守法公民了。

216° 联邦预算

联邦预算以十亿美元为单位。因为我们对10亿那样的大数没什么概念，人们就想了很多形象的说法来描述它到底有多大。有一个说法是这样的：假设你站在地面的一个洞口旁边，每分钟往下扔一张20美元的钞票，日夜不停地扔，那么你要98年才能把10亿美元仍干净。[16]

16 关于大数的其他故事，见《重游数学圈》R25到R36。

217° 坏习惯

"你不能当众说数字288。"

"为什么？"

"它太粗俗了。"[17]

17 "It's two gross." gross是计数单位，等于144。Gross还有粗俗的意思，原话等于说"It's too gross"。

218° 人如分数

人如分数，分子是他本来的样子，分母是他自以为的样子。分母越大，分数越小。（列夫·托尔斯泰）

219° 非凡的记忆力

1979年，联合国发言人艾伯斯塔克（Hans Eberstark）在欧洲核子研究中心将π背诵到了小数点后面9 744位，打破了他以前的5 050位的记录。

艾伯斯塔克1927年出生在维也纳，能在几秒中内心算两个8位数的乘法，在几分钟内心算两个12位数的乘法。如果告诉他你的出生日期，他能很快告诉你那天是星期几。他能在几秒钟内记住一个30位的随机数，而且倒背如流。他会讲16门"半"语言，那半门语言是瑞士德语。他说他能在一个下午记住一千位

的数字，而且，如果时间允许，他大概还能在三四年内记住一个100万位的数字。

在π的记忆上，艾伯斯塔克遭遇了来自美国的对手桑克(David Sanker)。两位在竞争谁能列入《吉尼斯世界纪录》。

220° 多出的1.5

多数科学著作都称我们地球的赤道周长为24 901.5英里。据说，那个零头1.5是假想的，是为了避免大家误以为那个数字只精确到100英里。(Michael A. Stueben)

221° 当然

老师在黑板前让学生练习自然数系。

“6之前是什么?”她问。

“一个窝囊的男人。”汤姆同学回答。[18]

18 6是“six”，与sex（“性”）同音。

222° 进展缓慢

儿子：爸爸，你能帮我找出这个问题里的最小公分母吗?

父亲：天哪，儿子！可别告诉我还没找到，我小的时候他们就在找了。

223° 阿兹特克的巧克力

巧克力信息学会报告说，中美洲地区的阿兹特克（Aztec）印第安人不仅以巧克力为食物，还拿它做计数单位。

阿兹特克印第安人不像我们用10来计数，而是像尤卡坦(Yucatán)半岛的玛雅人那样，以20为计数单位。满20打一个结，用一面小旗代表20。20^2则表示为一棵杉树。下一个单位

20^3 则表示为一袋可可豆，因为每个那样的袋子大约能装 8 000 粒可可豆。

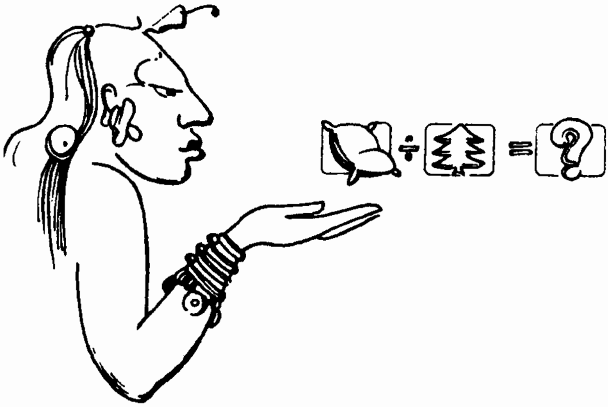
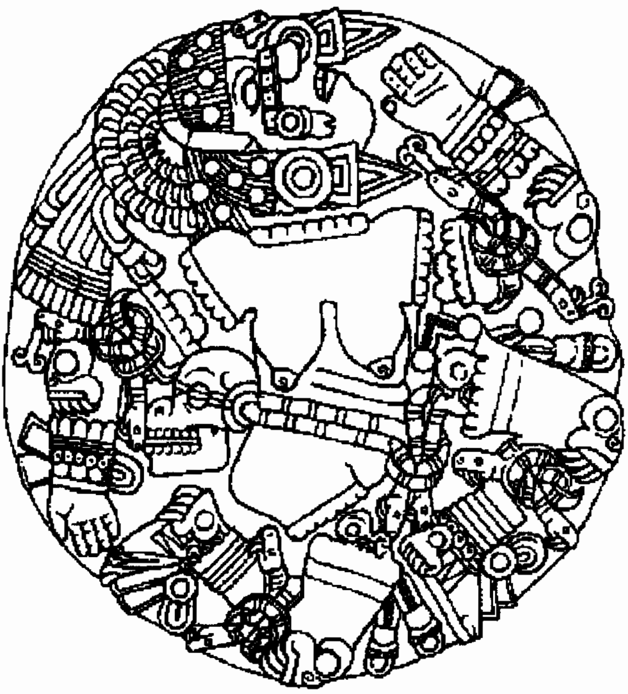


图 18



阿兹特克月亮女神 Coyolxauhqui 石刻雕像

224° 哈佛的力学课

1930年前后，哈佛的力学课恰好用几何级数来编号。数学2代表基础运动学，数学4为动力学，数学8为哈米尔顿－雅可比理论，数学16为伯克霍夫（G. D. Birkhoff）的相对论课程。布林克曼（H. W. Brinkmann）曾提出一门力学课，编号为数学32——不过只是一个笑话。

225° 整除性

鲍斯（Ralph P. Boas）说，他在《数学评论》编委会做编辑时，看见一篇论文，提出人们应该构想一种简单方法来检验一个整数是否能整除7。他指出，其实，只需要将检验的数以8为基表示出来，然后检验数字之和能否被7整除，就可以了。

226° 关于加法

关于加州大学伯克利分校已故著名化学家刘易斯（Gilbert Newton Lewis，1875～1956），有个有趣的故事。一天，他正在教工俱乐部和教育系的人聊天，听到有人争论应该如何教加法运算——该从上向下加还是从下向上加。“那很容易，”刘易斯打断说，“我总是先从上向下，然后从下向上，最后取它们的平均值。”

在一个讨论班上，有同学针对刘易斯的话评论说，“那句话很不礼貌，却也恰到好处。”[19]（特里格）

19 刘易斯的话两面都说了，等于废话；同学的原话说刘易斯的话既很“impertinent”，同时也很“pertinent”——表面上也是正反都说了，译文大概算他的“本意”。

227° 隐藏的算术规律

许多人都发现过一些学校课本上从来没有的算术规律。例

如，人人都知道，如果从上向下加一列数字，然后从下向上加同一列数字，结果往往是不同的。

228° 霍格特去世以后

我们这些认识霍格特（Verner. E. Hoggatt，Jr.）的人，现在自然会想起他的形象：他脱离了永恒的轨道，穿着一件长袍，头顶着一圈光环，张开两只翅膀，带着三弦的竖琴，右手的五个手指轻轻地抚在琴弦上……啊，我们多么怀念他，可我们还得强颜欢笑！（Dave Logothetti）[20]

20 霍格特是国际知名的斐波那契及其数列的专家，创办了《斐波那契季刊》。（原注）

229° 批评

在美国数学会的一次会议上，听完报告讨论时，狄克森（L. E. Dickson）对论文选择的题目进行了批评，“真是幸运，”他说，“新闻记者没来会场。如果他们来了，他们会发现我们的学会距离实际需要是多么遥远。”15 分钟后，他报告了自己的一个证明概要：每个足够大的整数都可以写成 1046（原来的最佳结果是 1140）个 10 的幂之和。[21]

21 他证明的问题有点儿像哥德巴赫猜想，也许是数学中离实际应用最远的问题。

230° 波利亚的回答

令 $E_n = P_n + 1$，其中 $P_n = p_1p_2\cdots p_n$ 是前 n 个素数之积。一个学生问 E_n 是否对无穷多个 n 都是素数，据说波利亚的回答是，“有很多傻子的问题是聪明人回答不了的。”现在只知道，当 $n =$ 1，2，3，4，5 和 11 时，E_n 是素数。[22]

22 有趣的是，我们正可以用这个 E_n 来证明素数有无穷多个。

231° 幸运数

1980 年，人类学家福琴（Reo Fortune，曾和人类学家米德

（Margaret Mead）结婚）猜想，如果 Q_n 是大于 $E_n = P_n + 1$（其中 $P_n = p_1 p_2 \cdots p_n$ 是前 n 个素数之积）的最小素数，则 $F_n = Q_n - P_n$ 总是素数。因为这个理由，数现在被称为幸运数。福琴猜想已经解决了。幸运数序列 $\{F_n\}$ 的前 21 个数为

3，5，7，13，23，17，19，23，37，61，67，61，

71，47，107，59，61，109，89，103，79，

它们都是素数。

（但愿福琴先生千万别有个女儿。[23]）

23 我们该称福琴小姐为 Miss Fortune（“失去好运”），那可就不好了。

232° 史密斯数

立海（Lehigh）大学维兰斯基（Albert Wilansky）教授感兴趣的是那样一些合数：它各位数之和等于它的所有素数因子的各位数之和。例如 9985 和 6036，分别满足

$$9985 = 5 \times 1997, 9 + 9 + 8 + 5 = 5 + 1 + 9 + 9 + 7$$

和

$$6036 = 2 \times 2 \times 3 \times 503, 6 + 0 + 3 + 6 = 2 + 2 + 3 + 5 + 0 + 3$$

已经证明，这样的数，在 0 到 999 之间有 47 个，在 1000 到 1999 之间有 32 个，在 2000 到 2999 之间有 42 个，在 3000 到 3999 之间有 28 个，在 4000 到 4999 之间有 33 个，在 5000 到 5999 之间有 32 个，在 6000 到 6999 之间有 32 个，在 7000 到 7999 之间有 37 个，在 8000 到 8999 之间有 37 个，在 9000 到 9999 之间有 40 个。维兰斯基想知道，是否存在无穷多个这样的数。已知最大的这种数归功于史密斯（H. Smith），他不是数学家，而是维兰斯基的妹夫。那个数是 4937775，恰好是史密斯的电话号码。因为这一点，维兰斯基把这种数称作史密斯数。

233° 真理

几乎所有正整数都大于 1 000 000 000 000。[24]

24 见 Richard Courant and Herbert Robbins《数学是什么》，牛津大学出版社，1941。

234° 另一个真理

近似的整数总是错误的。(Samuel Johnson)

235° 莫菲(Murphy)律

用精确的数学名词来说，1 + 1 = 2，其中符号 = 的意思是，即使出现，次数也很少。[25]

25 见 Arthur Bloch《莫菲律：第三册》，Price/Stern/Sloan，1982。

236° 另一个莫菲律

对大数值的 1，当 2 为小数值时，1 趋近于 2。

237° 聪明的动物

《走进数学圈》里讲过很多故事，说明有些动物能在一定程度上识数。还有个故事，更坚定了我的信念。故事说，农场饲养的雌水貂生了 5 只小貂，每天喂食的时候，貂妈妈会把给她的肉做成 5 个肉饼，然后招呼孩子们来吃。她从来不会做 6 个或 4 个，而总是做 5 个。



图 19

概率与统计

238° 抽彩

每次彩券他都买，可从没中过奖。为了鼓舞士气，彩券官员觉得他们应该安排让他中一次奖。下次他买彩券时，他选了数字3。他们决定在一个帽子里全放数字3，然后蒙上他的眼睛，让他搅动票根，从中拿一张出来，那么他当然只能拿到数字3。结果，被蒙上双眼的他把手伸进帽子，用力搅动，然后拿出一张票来——数字是 $7\frac{1}{8}$——他拿的是商店贴在帽子里的尺寸标识。(Harry Hershfield)[26]

26 Harry Hershfield（1885～1974），美国喜剧艺术家和幽默作家。他有句妙语说，“我每天早晨9点钟醒，抢过晨报，然后看讣告一栏，如果没有我的名字，我就起来。”

239° 理论与现实

假如一枚硬币正面反复出现100次，对统计一无所知的人就会断言，根据“平均律”，它下一次几乎肯定会出现反面。任何统计学家都会指出，每次实验都是相互独立的，下次结果是不确定的。可任何傻子都能看出，那枚硬币两面都是正面。(Ludwik Drazek)

240° 还是理论与现实

如果某样东西出错的机会是50比50，那么10次有9次它都会出错。(《哈维新闻》，1979年秋[27])

27 “哈维（Paul Harvey）新闻与评论”是美国广播网影响最大的节目之一，从1951年开始，主持人哈维已经80多岁，有人说他是“世界上最大的一个人的网络”。

241° 转换

明天下雪的几率是40%，气温28%摄氏度。

242° 一个概率定理

机会只眷顾那些有准备的人。(巴斯德[28])

28 巴斯德(Louis Pasteur, 1822 – 1895),法国化学家和生物学家,最大成就是倡导细菌学说,发明了接种疫苗。

243° 接近零概率的好处

一个聪明的加油站老板贴出一张告示,上面写着:“若能猜出需要多少钱,就免费为你装满油箱。”他那儿总是排着长长的队伍,顾客们都盼着能免费加油,当然,他们一般都输了。有人问老板他是怎么做的,他说,大约两年前,一个伙计猜对了,不过那只花了他 1.3 美元。他说,他不再为顾客准备区区 1 美元的东西了:人人都想把油箱灌满。

244° 分类

有三种谎言:谎言,讨厌的谎言,统计。(Benjamin Disraeli)[29]

29 《告别数学圈》(A308)中,错把这个分类归于马克·吐温了。(原注)

245° 妙语

总有一天,统计思维会像阅读和写作能力那样,成为一个能干公民的必备素质。(W. H. Wells)

246° 忠告

你应该像醉汉用灯柱那样运用统计——不是为了照明,而是为了支撑。(Andrew Lang)

247° 统计学家的写照

所谓统计学家,就是在无根据的假定和预料中的结果之间,画一条数学精确的直线。

248° 首尾相接

如果把统计学家首尾相接，他们无疑会达到某个结论。

249° 男孩儿和女孩儿

统计学家告诉我们，就生长发育而言，到 12 岁时，男孩儿会比女孩儿落后一年；在 12 岁到 17 岁之间，男孩儿会逐渐赶上；17 岁以后，他们就同步了。

250° 机会

一个热情而充满朝气的年轻人正在为申请的职位接受面试，他问公司经理，如果从最底层做起，他有多大机会做到最高的位置。“很小，”那人回答，“你看，我们的业务是钻井。”

251° 统计

据说，一个人为了把东西放进空胃需要比把它放进空脑多费 176 倍的力气。

252° 经济学家与统计学家

经济学家开始对很多事情知道很少，然后对越来越多的事情知道得越来越少，最后，几乎对所有事情都几乎一无所知。

相反，统计学家开始对很少的事情知道很多，然后对越来越少的事情知道得越来越多，最后几乎无所不知。

253° 屋顶保险

一个推销员向一个房主推销屋顶保险。“每小时 100 英里的

大风，”他说，“会把你屋顶的瓦片吹走。”

“当然会的。”房主回答，“可我们这儿没有那么大的风。这儿有史以来最大的风才每小时 10 英里。”

“所以呀，”推销员接着说，“尽管你不会丢失所有的瓦片，但你会失去 10% 的瓦片。那还不值得你买一份保险吗？”

254° 统计与比基尼泳装

统计就像比基尼泳装，显露的只是暗示，遮挡的才至关重要。

255° 再说统计

根据统计学家的说法，一般人的一生至少有五分之一时间在谈话。正常说来，人在一天里说的话大约可以写满一本 50 页的书。一年下来，一个普通人说的话可以写满 132 本 400 页的书。



图 20

256° 还是统计

经过几次训练，新校舍的同学们请校长和校董会主席来看他们的消防演习。警报声响起后，300 多个同学在一分半钟的时间内就撤离了教学大楼。

同学们骄傲而满意地回到教室。过了不久，午间休息的铃声

响了，校长手里还拿着秒表，就好奇地做了一个试验，结果发现，还不到1分钟，整个大楼就空了！

257° 有数也有“形”

在一个小商业学院的新生会上，校长向同学们引介了学生部主任，是一个身材迷人的俏佳人，她报告了一些有趣的注册统计数字。报告结束后，她回到自己在讲台上的位置，校长真诚地对同学们大声说，“我不认识你们，不过那样的数字真令我激动啊。”[30]

30 数字“figure”也指“身材”，校长真的对什么感兴趣呢？

258° 难怪

据说，一个普通家庭有两个半小孩儿，难怪世界上有那么多低能儿。

259° 统计

我有五个孩子。有个玩儿过统计的朋友说，如果我有第六个孩子，他肯定会斜眼儿。我想大概还有我不知道的统计学定律，就问他为什么。

“因为，”朋友回答，“统计学已经证明，每六个小孩中有一个是中国人。”[31]

31 “斜眼儿”（Slanted-eye）指有亚裔血统的人，是美国人歧视东方人的词儿。

260° 统计数字

我们听说，1961年，美国有3100万小孩在公立小学读书。那到底是多少呢？如果让孩子们排成四列纵队从大西洋向太平洋长征，前后两个孩子间隔一个手臂。那么，当最前面的孩子远征回来时，最后面的孩子们还没走出国门呢。

261° 人多力量大

统计学老师在黑板上画了一条直线，然后转身对同学们说，“我要请你们每个人来估计这条线的长度。”课堂立刻活跃起来。同学们估计的长度从 53 英寸到 84 英寸，老师都记下来了。接着，他把这些长度加起来，除以全班的总人数。他宣布，大家估计的平均长度为 $61\frac{1}{8}$英寸，尽管没人提出这个精确值。

然后，他测量直线的长度，结果是 $61\frac{1}{4}$英寸。

这说明，人多力量大。

262° 天真的统计学家

一个统计学家对某个村子的 6000 多人做了一次数学测试，同时记录了每个人的双脚的长度。他惊奇地发现，一个人的数学能力与他的脚的大小之间存在很强的相关性。

有问题的问题

263° 挑刺儿

1985 年，教育考试服务中心（ETS）为学生提供了一个机会，让他们在考试后查阅考题、答案和最近 PSAT 和 SAT 考试的答案[32]。有个学生发现，在每次考试中，主考者的数学答案选择都有问题。ETS 承认了那些失误，为 250 000 个 PSAT 和 19 000 个 SAT 考试者加了分数。可以认为是数学的阳光照亮了这些令

32 PSAT 是“学业能力初步考试”(Preliminary Scholastic Aptitude Test)，相当于 SAT 的预考。

人不安的事实——从这儿看到，有些聪明的学生会仔细读题，不愿接受预先的（未明说的）假定，也不屈从于权威规定的答案。下面是两个有问题的问题连同 ETS 和挑战者的答案。

问题：在如图所示的四面体 *ABCD* 和 *EFGHI* 中，除了底 *FGHI* 外的所有面都是大小相同的等边三角形。如果将面 *ABC* 放在面 *EFG* 上，使其顶点重合，那么最后的固体有几个暴露的面？

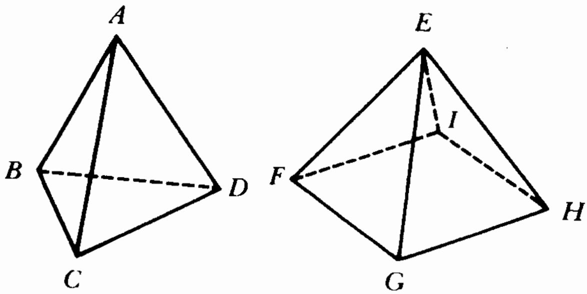


图 21

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8　（E）9

ETS 答案：（C）；挑战者的答案：（A）。

问题：下面的数列中，哪一行包含一个整数的平方和另一个整数的立方？

A	7	2	5	4	6
B	3	8	6	9	7
C	5	4	3	8	2
D	9	5	7	3	6
E	5	6	3	7	4

ETS 答案：B；挑战者的答案：B 和 C。

264° PSAT 试题 44 的挑战者

上面故事里讲的给 PAST 考试挑刺儿的那个几何试题的"错误"答案，来自佛罗里达可可沙滩（Cocoa Beach）中学的 17 岁少年丹尼尔·罗文（Daniel Lowen）。

丹尼尔说，他第一眼看试题 44 时，觉得很惊讶，它实在太简单了。"就像一个数数的问题，但那是惟一一道没有公式的题。"他说。"我看它肯定是道陷阱题。"又看了一遍题目，他发现，如果把两个金字塔拼接起来，则 7 个三角形侧面中的 4 个将合并为新固体的两个四边形侧面。"所以我选择的答案是 5，"他说。那天晚上回家时，他做了两个金字塔模型，验证了头脑里的答案。

后来，丹尼尔收到了考试成绩，得了 48 分（满分 50），而两个错误答案中有一个就是问题 44，正确答案是 7。

"我从没想到他们会出错，"丹尼尔说，"我想一定是我的模型错了。"于是，他和身为洛克菲勒的机械工程师的父亲道格拉斯（Douglas J. Lowen）坐下来，一起用数学方法研究这个问题。

"老爸想证明我错了，可没成功。"丹尼尔说，"接着，他想到两种不同的数学证明，我是正确的。"[33]

然后，父亲打电话给考试委员会，还寄去一封信。

33 例如，可以证明两个金字塔侧面的二面角正好互补。

265° 另一个有问题的 SAT 问题

还有一次 SAT 考试出现了有缺陷的问题。问题的图形是一个小圆和相邻的大圆，大圆半径是小圆半径的 3 倍。问小圆在大圆上滚一周需要转几圈。

正确答案应该是4，出题的人却认为答案是3，4甚至没有出现在五个选项里。

266° 难忘的分数

说到考分的话题，还应该讲讲下面的有趣故事，虽然其中不涉及缺陷问题。

卡兰（Stephen Curran）是比洛伊特（Beloit）学院三年级学生，曾在1980年普特南（Putnam）数学竞赛中获得荣誉奖，看来他是不会忘记竞赛的分数和名次的。他在第四十一届普特南竞赛中得了41分，获第41名。[34]

34 见《数学杂志》1981年5月。

267° 一个老问题的复活

那是在1905年11月，《班戈每日新闻》提出如下问题，出题者署名“Mystified”（疑惑）。

“一个先生想花100美元挖一条100英尺长的沟——即平均1美元挖1英尺。他雇了两个劳工，同意给第一个人每英尺75分，第二个人每英尺1.25美元。那么，两个人各需挖多长才都挣50美元?”

72年后，在1977年12月2日的《班戈每日新闻》上，缅因州克里夫顿（Clifton）的罗丽思（Annie Lawless）太太提出重新讨论上面的问题，她想知道，这个在1905年令许多专家困惑的难题，是否能简单地用如今小学生们在学校学的“新数学”来解决。

罗丽思太太显然没意识到，1905年就有人看穿了问题，那人在回信中指出，“也许那个疑惑先生能回答这个问题。如果一头95美元的奶牛每天产20夸脱牛奶，一只蚂蚱能轻松地蹦多

高呢?”

罗丽思太太对新一代是过分乐观了。1977 年 12 月 1 日（罗丽思太太重提老问题的前一天），《班戈每日新闻》登载了有关佛罗里达学生们的中学会考成绩的事情，百分之四十的同学不会做简单算术。其中一个“简单”问题是，如果一加仑油漆能涂 10 平方米的墙壁，那么为了涂满一堵 12 米高、16 米长的墙，需要多少加仑的油漆?

268° 经常出现的缺陷问题

有一道缺陷问题经常出现在报刊杂志上。问题是这样的：

三个人走进宾馆，要了一间 30 美元的房间（即每人 10 美元）。后来，宾馆经理发现他们无意间多付了钱，房费应该是 25 美元。于是他给服务生 5 美元，让他退还三个客人。服务生却不老实，自己藏了 2 美元，只退了 3 美元。这样，每人房费为 9 美元。现在，三人付了 27 美元，服务生拿了 2 美元，一共 29 美元。还有 1 美元哪儿去了?

269° 时钟问题

智商测试中有时也有缺陷问题。其中常见的一个是时钟问题：

一只钟现在的读数为 3 点 40 分，问什么时刻钟的时针与分针交换位置? 设计的答案是 8 点 20 分。



图 22

测试者没有看到，时钟上的读数其实只由时针决定，分针不过是为了方便。因此，差 20 分 4 点时，时针并不在 4 点

的刻度，而是在 3 和 4 之间三分之二的地方。指针位置交换后，时针就该在 8 点的刻度，那分针就该指向 12，而不可能在 3 和 4 之间。

时钟问题还关系着一个有趣的问题：在什么时刻，其指针交换位置后仍然是一个正确的读数？

270° 归纳问题

在智商测试中，经常有这样的问题："在序列 1，4，9，16，…中，下一个数是什么？"设计答案为 25，即数列 n^2 的第五项。

其实，第五项可以有无数的选择，甚至如 π。这样，数列的通项是

$$f(n)=n^2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\pi-25)/24$$

其前 4 项为 1，4，9，16，第五项为 π。

第四象限

从光学错觉到因子分解

娱 乐 角

271° 一个光学错觉

下面右边的数看起来较大，可左边的数却是它的两倍。(Michael A. Stueben)



图 23

272° 还是错觉

当你看下面的正方形时，中心的黑点就消失了。(Michael A. Stueben)

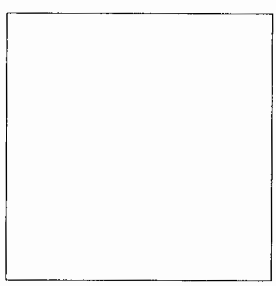


图 24

273° π 的记忆法

下面的一句西班牙文是记忆 π 前 10 位的一个好方法：

Sol y Luna y Mundo proclaman al Eterne Autor del Cosmos![1]

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 6

1 大意为“太阳、月亮和世界颂扬宇宙永恒的造物主。”

最后一位数字6是从5四舍五入来的，它后面的几位是8，9，7。

274° e的记忆法

下面是记忆e的前几位的方法：

He studied a treatise on calculus[2]

2 7 1 8 2 8

2 他研读过一篇微积分的论文。

275° 三角记忆法

人们发现，记忆工具有助于刚上学的小学生解答某些类型的问题。例如，假定我们有3个量a，b，c，满足$a=bc$，我们想求其中一个量，用其他两个量来表示，我们可以将3个量像下面的图形那样安置。然后，我们将手指放在要求的量，其余两个量的相对位置就指示了相应的运算。

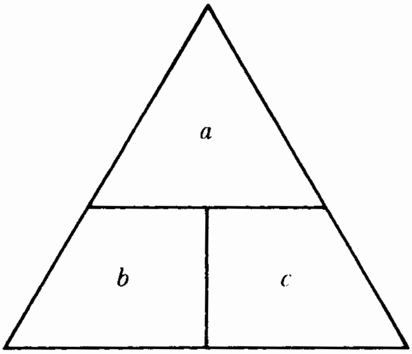


图25

这种三角关系的例子很多，如

距离=速度×时间

电压=电流×电阻

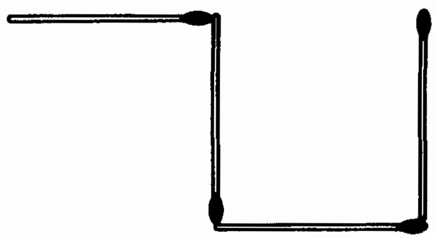
功率 = 电压 × 电流

质量 = 密度 × 体积

力 = 质量 × 加速度

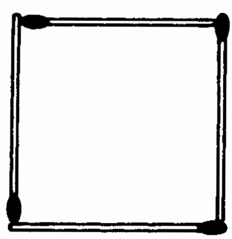
276° 几何与代数观点

你能移动一根火柴使其成为平方数吗?

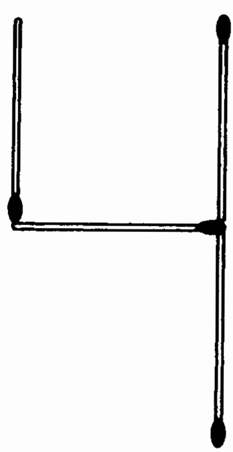


(a)

答案



(b) 几何



(c) 代数

图 26

277° 当且仅当

康威（John Horton Convoy）是英国游戏专家，将大家熟悉的“当且仅当”（iff，即 if and only if）推广到“一且惟一”（onnce，即 once and only once），“在且仅在”（whenn，即 when and only when），等等。盖伊（Richard K. Guy）讲过一个好玩儿的“反例”，出现在 1981 年“Banff 有序集学术研讨会”上。有人炫耀地穿了件运动衫，上面印着

BANF AND ONLY BANF。[3]

3 Iff 在数学命题中常用来说充要条件。按照这个写法，那行字母当然就该简写为 Banff。

278° 零下 3 度

0

Ph. D

M. A.

B. S.[4]

4 数字“0”下是三个学位（博士、硕士、学士）的简写，而学位“degree”也是“度”。

279° 预言

1966 年，加德纳（Martin Gardner）笔下的神秘的马特里克斯（Matrix）博士预言，π 的第 100 万位是 5，因为在钦定本《圣经》第三书第 14 章第 16 节里，出现了神秘的数字 7，而其中的第七个词有 5 个字母。[5]1974 年，古伊洛德（J. Guilloud）和他的助手们在巴黎用 CDC7600 计算机费了 23 小时 18 分，把 π 算到了 100 万位。令人惊奇的是，第 100 万位果真是 5。（如果除去首位 3，则第 100 万位是 1。）（George Miel）

5 钦定本《圣经·利未记》（*Leviticus*）14：16：And the priest shall dip his *right* finger in the oil that is in his left hand，and shall sprinkle of the oil with his finger *seven* times before the LORD。

280° 数学归纳法的证明

我们现在证明“定理”$P(n)$：

n 个数的集合的所有数都相等。

1）P（1）显然是正确的。

2）假定 k 是满足 P（k）的自然数。令 a_1，a_2,... a_k，a_{k+1}为任意 $k+1$ 个数的集合。于是，根据假定，$a_1=a_2=...=a_k$，而且 $a_2=a_3=...=a_k=a_{k+1}$。因此，$a_1=a_2=...=a_k=a_{k+1}$，从而 P（$k+1$）正确。[6]

由此，P（n）对所有自然数 n 成立。

6 请读者自己发现证明错在哪儿。

281° 还是归纳法证明

现在我们来证明"定理"P（n）：

如果 a 和 b 是任意两个自然数，满足 max（a，b）$=n$，则 $a=b$。

1）P（1）显然是正确的。

2）假定 k 为满足 P（k）的自然数。令 a 和 b 为任意两个自然数，使 max（a，b）$=k+1$，并考虑 $\alpha=a-1$，$\beta=b-1$。于是，max（α，β）$=k$，由假定，这意味着 $\alpha=\beta$。因此，$a=b$，P（$k+1$）正确。

由此，P（n）对所有自然数 n 成立。[7]

7 这两个例子很好说明了归纳法的两个步骤缺一不可。

282° 证明定理的其他方法

反证法（*Reductio de nauseum*），

挥手的证明（有时也称意大利证明法），

胁迫下的证明，

引用不存在的权威来证明，

最小惊奇的证明，

等到了进程才证明，

归结为一系列无关的引理的证明（有时也称分支合流证明法），

最后，还有一个古老的应急方法：当作任务来证明。[8]

8 见 Rome 出版社1979年数学年历。

283° 激情的平方根

谢根（Steve Shagan）在《天使之城》里说，“可你不能靠激情来做算术。激情没有方根。”

对此，韦恩回答，“恰恰相反，我们可以证明下面的字母方程

$$\sqrt{(激情)}=吻$$

有惟一解”

284° 贴在汽车保险杠上的标语

数学家是数 $-e^{i\pi}$

[9]

9 根据著名的欧拉公式 $e^{i\pi}+1=0$，这话的意思大概是，如果撞车（+1），则大家都完蛋了（0）。

285° 常见数学用语及其含义

1 明显地（clearly）：可以在半天内证明。

2 省略的细节（details omitted）：作者不能确立的结果。

3 白痴（idiot）：在数学上不如我们聪明的人。

4 不难（it is not difficult）：很难。

5 很容易看到（it is easily seen that）：假的。

6 独创的证明（ingenious proof）：作者能明白的结果。通常也说“平凡的”。

7 有趣的（interesting）：乏味的。

8 天才（genius）：比我们聪明的人。

9　显然（obviously）：可以用三张纸证明。

10　同样（similarly）：我们可以证明它，但我们太懒了。

11　不失一般性（without loss of generality）：我们只证明最简单的情形。

12　众所周知（well - known）：不能确定出处的结果。（Michael A. Stueben）[10]

10　读过英文数学课本的同学看到这些解释当能会心一笑。

286°　八边形

一些二年级同学在识别老师举着的几何图形。老师拿起一个正方形时，他们大声回答"正方形"。三角形当然简单，几乎所有同学也认识矩形。接着，老师拿起一个八边形，问：

"这是什么？"

孩子们异口同声告诉她："停车标志。"



287° 新数学

最近才发现，我们多年来一直在倒着写数字5，这就令标准数学显得陈腐过时了。于是，人们开始重新估价从1数到10的计数方法。老师向同学们讲布尔代数的高等概念，在报复的威胁下求解通常不可解的方程。(艾伦)[11]

11 伍迪·艾伦(Woody Allan)是大导演，也是幽默作家。这段文字见他1971年的随笔《扯平》(*Getting Even*)。

288° 学数学

怎样能缩短这门功课呢？很多人费好大气力也没能把乘法口诀背下来，你能使那样的人更少吗？平方根像牧场的树桩那么坚硬——只有靠长年累月的努力才能把它“开”出来。这个过程急不得。

另外，我们撇开算术来看代数。你不能靠肩膀挤过二次方程或掠过二项式定理。相反，在越来越多的混沌的公式面前，你将举步维艰，寸步难行，跌倒在二项式定理的某个地方，眼睁睁看着远方地平线上的微积分。尽管还在奋勇挣扎，但我们几乎每个人就这样终结了数学训练，只有一小撮叫“数学家”的人是例外——他们，和骗子一样，都是天生的。(Stephen Leacock)

289° 启示

我曾对数学有一种感觉——我把它看透了。它对我来说越来越深——仿佛落进深渊里的深渊。我看见一个量通过无穷大从正的变为负的——就像我们看金星从太阳表面穿过，或者看市长大人的表演。我很明白它为什么发生，为什么背叛不可避免——但那是在晚餐过后，我让它发生。(丘吉尔)

290° 霍格特解数字游戏

20 世纪 40 年代流行一种数字游戏，举国众多数学家都沉迷其中。游戏源于《美国数学月刊》的一个问题。问题是把 1 到 100 的每个数用四个 9 和合理的数学符号表达出来。

几年后，游戏似乎变得更难了，要把从 1 到 100 的数字用算术运算表达出来，包含 0，1，2，…，9 十个数字，且每个数字只能出现一次。霍格特（Verner Hoggatt，Jr.）彻底而绝妙地解决了这个问题，他发现，对任意非负整数 n，

$$\log_{(0+1+2+3+4)/5}\{\log_{\surd\surd\cdots\surd(-6+7\cdots)}9\}=n$$

其中，第二个对数底包含了 n 个方根。注意，10 个数字是以自然顺序出现的，而且，通过在需要的地方加负号，霍格特证明，任意整数，不论正负，都能以需要的形式表达出来。

那时候，另一个好玩儿的数字游戏是用不多于 3 个 π 和可能的运算符号来表示尽可能多的连续正整数。

291° 美的度量单位

现在数学走进了美学，也许用得着下面这个关于美的度量单位的定义：

1 毫海伦（*millihelen*）等于刚好能驱动一只船的美。[12]

12 海伦（Helen）是引发特洛伊战争的美人，如中国的西施，是美的代表。



图 27

13 *Daffynition* 是用双关语来玩儿文字游戏，有些地方接近"魔鬼词典"。

14 "deuce" 是扑克牌里的小二。

15 多数都是根据英文名词的多义性编的故事。

292° 魔鬼词典（Daffynition）[13]

1 演绎（Deduce）：一副牌中最小的一张。[14]

2 极小（Minimum）：小妈妈。

你听说过吗？

数学领域的玩家有时喜欢杜撰一些子虚乌有的数学发现的荒诞故事，下面是这类作品的几个典型代表。[15]

293° 集合论

康托（George Cantor）和母亲正在讨论宴会的安排。

"我们现在需要的，"康托太太说，"是一套（set）新餐具，以后偶尔在聚会时候用。"接着，她详细说，每个菜盘子要配一个沙拉盘子、一个杯子和一个碟子等等。

儿子有很强的抽象思维能力，对妈妈讲的那些一一对应的东西很感兴趣，后来纠正了他的研究，发现了集合（set）论的基本原理。

294° 外集合论

据说，"不过毫无根据"，芝加哥自由作家柯里曼（Mitch Coleman）曾研究过所谓外集合（extra-set）论的概念的起源。他说，普通集合论的这种推广，最早是由一个默默无闻的名叫温伯格（Carl Weinberg）的美国数学家提出的。温伯格发明它，是为了找他的车钥匙，因为他总是把它放错地方。这个理论的一个实际应用是，温伯格曾复制了额外的一串（extra set）钥匙放在油

箱盖里。

295° 牟比乌斯带

牟比乌斯带的真正发现，流传着许多不同的说法。其中一个说，数学家牟比乌斯（August Ferdinand Möbius）在海边度假，晚上被苍蝇搅得心烦意乱。他拿来一张涂满浆糊的纸条，扭转半圈，将两头粘结起来，然后挂在他度假小别墅卧室的椽子上。他的简易灭蝇器很管用，他可以安然入睡了。早晨醒来时，他的眼光落在挂在床头的纸带上，仔细一看，惊奇地发现原来它只有一个侧面，一个边缘。著名的牟比乌斯带就这样诞生了。

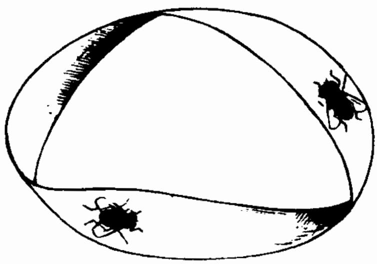


图 28

296° 质能方程

爱因斯坦发现著名质能方程 $E = mc^2$ 的灵感，也有不同的传说。根据拉松（Gray Lason，“遥远的一边”的发明者）的说法，爱因斯坦在他的小黑板上涂写，否定了一个又一个形式的质能方程。他尝试过 $E = mc^3$，$E = mc^7$，$E = mc^4$，$E = mc^{10}$ 等等。当他正在逐个检查时，聪明的夫人突然闯了进来。她像没看见丈夫似的，拿起羽毛掸子拍打衣服上的灰尘，清理桌上的东西。然后她退一步，欣赏自己的劳动成果，大声夸耀说，现在方方正正，比先前看起来舒畅多了。爱因斯坦听见“方”字，脸上掠过一丝

亮光，最后满意地在黑板上写下著名的公式：$E = mc^2$。[16]

297° "轮流耕作的理论"

"域（field）论"的起源似乎比人们以前认为的早得多。荣誉应归一个姓龙（Clung Long）的中国农民，他生活在1160年前后，家住南方的一个省。他发现，如果让一块农田（field）种植一年然后休耕一年，那么从长远看，庄稼的收成会好得多。为了区分这种早期的农田理论与后来的代数学的域论，人们自然将其称为"轮流耕作的理论"（*alternate field theory*）[17]。（A. A. Aaron）

298° "完全有序的耕作"

"轮流耕作的理论"发现大约一个世纪之后，农田耕作理论才得到进一步发展。1243年，还是那个姓龙的中国农民，开始成行地栽种蔬菜，而不像从前那样胡乱地播种，因而有效利用了整块田地，而不仅限于零星的部分。这些概念引出了"完全有序域论"。（A. A. Aaron）

299° 统一场论

爱因斯坦从来没有找到统一场论。不过，这个问题其实早就在社会主义农业实践中解决了。在社会主义制度下，每个农民将各自的麦田联合起来，形成一块巨大的合作田。根据这样的蓝图，庄稼没有收成就可以相互埋怨了。（Ruth Stearns）

300° 拓扑学的起源

有时听人说，拓扑学的出现是因为有人看不出方和圆的区别。最近在西班牙巴比斯顿（Barbeston）附近的洞穴考察中，发现

16 这个故事编得实在荒唐。质能公式是狭义相对论的自然而简单的结果，不属于那种"灵感类发现"。

17 它在数学中的意思是"交换域论"。另外，场论的英文也是 Field theory。

了一幅壁画，似乎说明早在公元前 1000 年，人们就已经分不清方圆了。下面是那幅画的示意图，是一匹方形的马在回头张望。历史学家宣称这是近年来最伟大的考古发现之一。(B. T. Fischer)

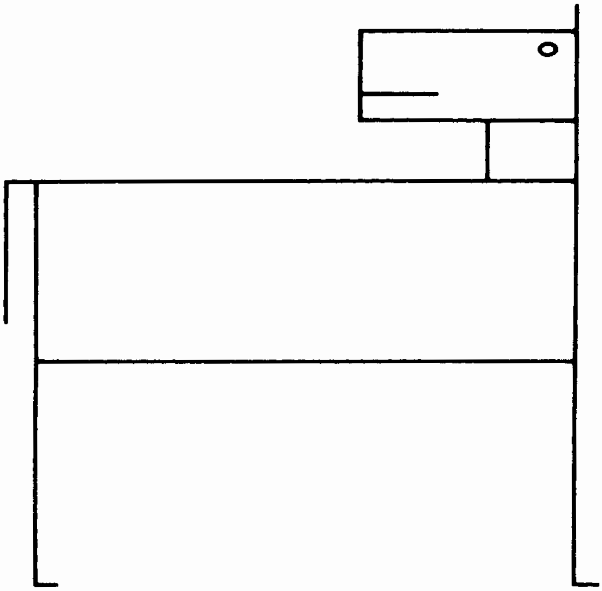


图 29

301° 对数的简化

1894 年，佛蒙特州一个叫斯通（Jereiah Stone）的农民卖了 18 英寸原木（logs）做柴炉。他有两堆原木，一堆是“天然原木”（natural logs），另一堆是“普通原木”（common logs）。他出卖的天然原木的价钱是普通原木的两倍。买主们向乡公所告发了他，于是乡里来人调查。调查人员没看出两堆原木有什么本质区别，就责令那个农民用一个价格卖两种原木。这就导致了受人欢迎的对数（logs）理论的简化。(T. B. Henderson)[18]

18 参见本卷第二象限 R175。

“回文”先生

克里腾登（R. W. Crittenden）当了多年的中学数学老师，不仅是个出色的好老师，也是狂热的回文爱好者。他还喜欢教学生用波利亚的方法解数学题（他曾在斯坦福大学的国家科学基金会项目中，给波利亚当过12个夏天的助手）。下面是他的几个回文游戏。

302° 有趣的日子

今年（1982）2月8日，我想起这个日子有回文特征：2/8/82。进一步看，我注意到2882是第44个五边形数。我还发现，第44个六边形数4774，也是回文的。同样，第44个九边形数6666，和第44个11边形数8558，也都是回文的。可惜啊，第44个12边形数不是回文的。[19]（克里腾登）

19 我们知道，形如 $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$ 的数叫三角形数。同样，$1+4+7+\cdots+(3n-2)=n(3n-1)/2$ 叫五边形数。类似地可以定义任意多边形数。

578 GELLERT DRIVE
SAN FRANCISCO, CA 94132
(415) 66-161-66

R. W. CRITTENDEN
MATHEMATICIAN - EDUCATOR
PALINDROME SPECIALIST

SERRAMONTE HIGH SCHOOL
DALY CITY, CA 94015
(415) 992-9555

图 30

303° 一个回文平方数

$$637832238736=(798644)^2$$

304° 回文三角数

$$15051=(173)(174)/2$$

当这个数出现在汽车的里程表时，克里腾登还停下车，给仪表盘拍了张照片。

305° 有趣的回文

919 是个有趣的回文数，因为

$$9^3+1^3+9^3=1459$$

而

$$1^3+4^3+5^3+9^3=919$$

306° 个性化车牌

我在《告别数学圈》A351 看见 IXOHOXI，就到加州汽车管理局去申请了我的个性化车牌 IXOHOXI。下面是它的照片。（克里腾登）



图 31

307° 克里腾登的回文邮票

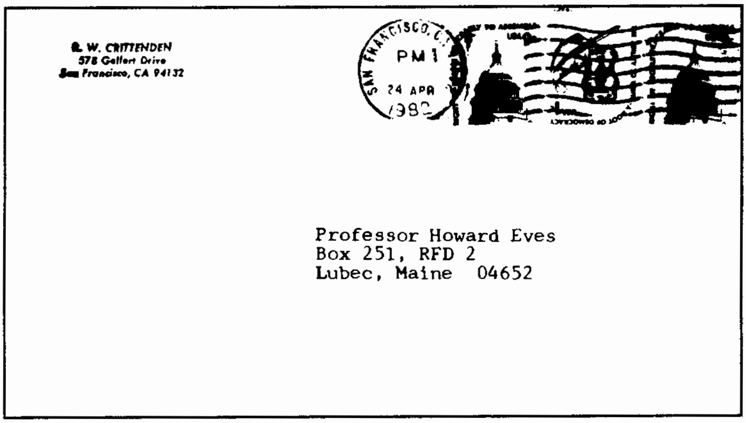


图 32 (a)



(b)

308° 20 分邮票的回文展示

我发现了 22 种素数的 20 分邮票的回文展示。(克里腾登)

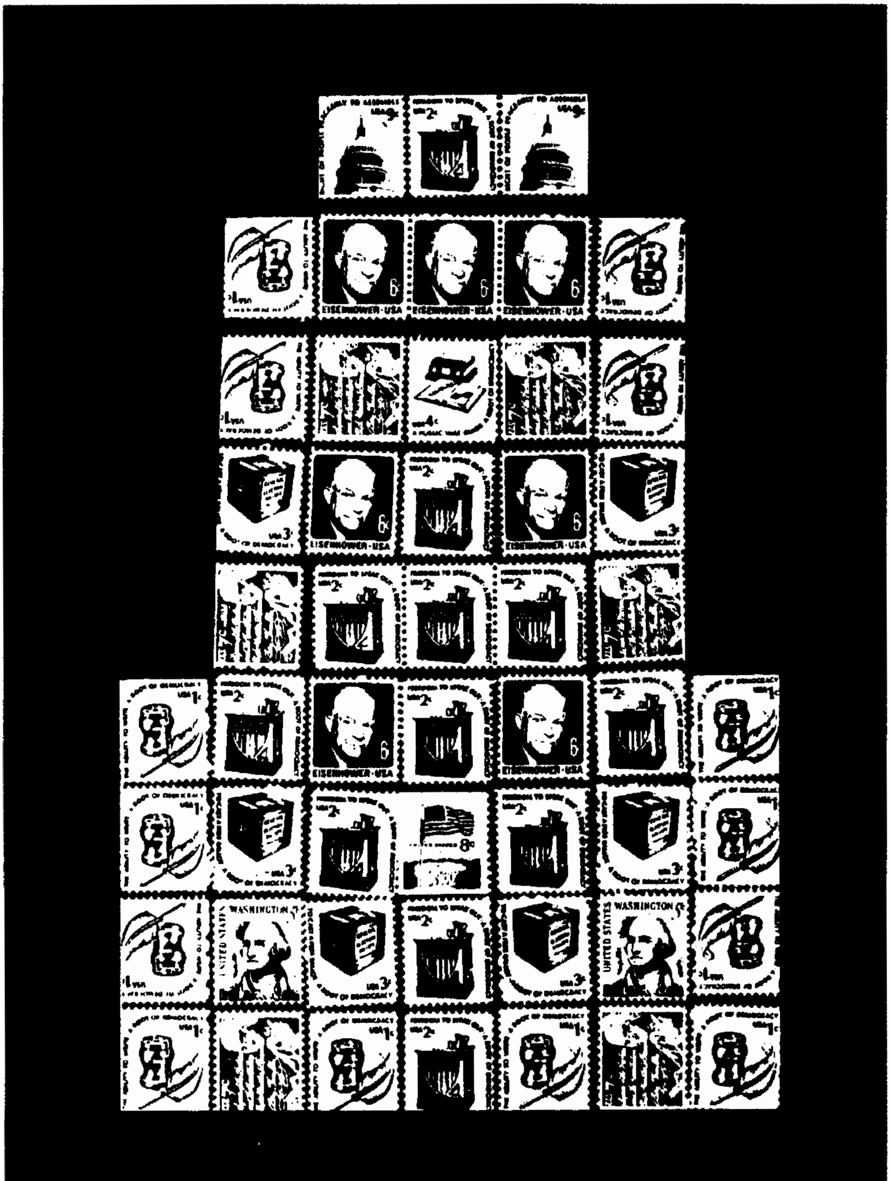


图 33

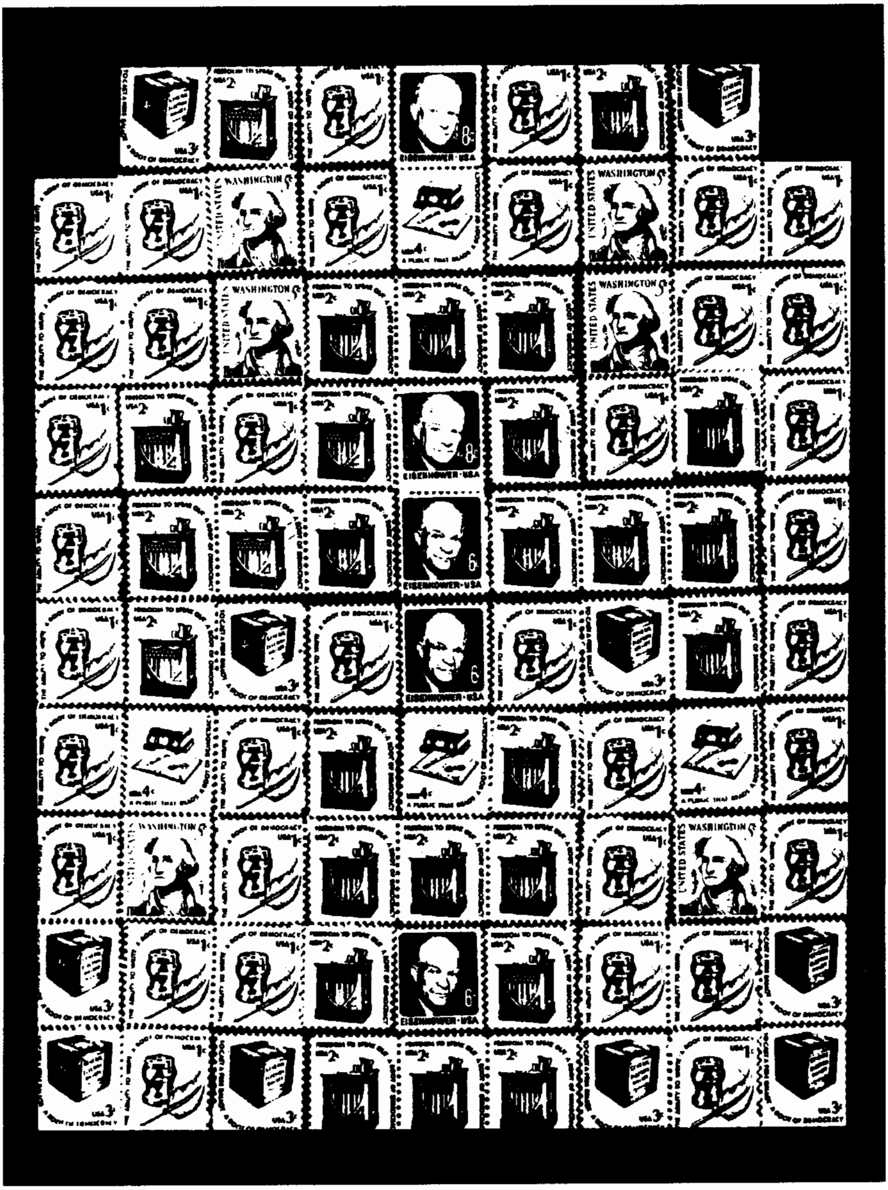


图 34

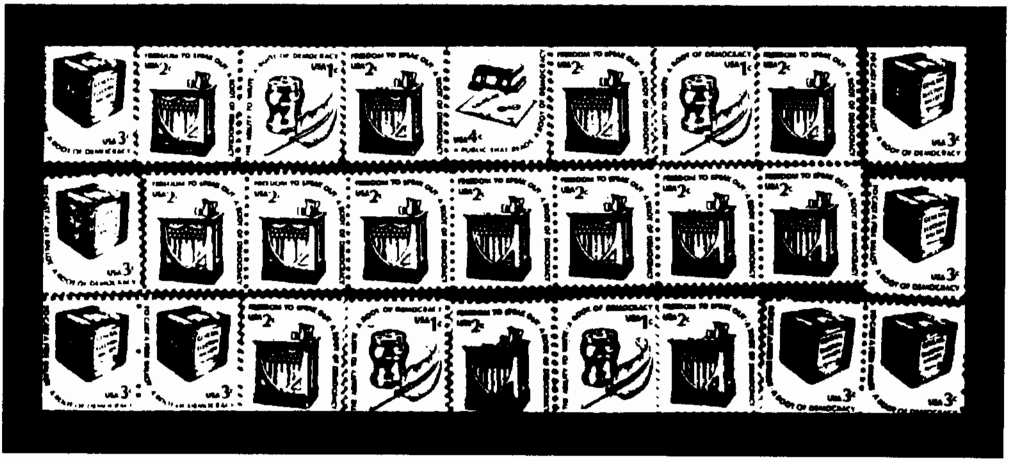


图 35

309° 美国城市的回文邮政编码

有几个美国城市具有素数的回文邮政编码：

75557　得克萨斯州波士顿（Boston）

31013　佐治亚州（Clinchfield）

12421　纽约州丹佛（Denver）

35753　阿拉巴马州海托普（Hytop）

93239　加利福尼亚州凯特曼（Kettleman）

96769　夏威夷州马卡维莱（Makaweli）

74047　俄克拉荷马州芒兹（Mounds）

15451　宾夕法尼亚州林恩湖（Lake Lynn）

97879　俄勒冈州特洛伊（Troy）

下面的城市也有素数的回文邮政编码：

纽约州：Amawalk，Bloomingburg，Comstock，Eagle Bay，
Peakville，Great Valley

宾夕法尼亚州：Markleton，West Sunbury，Tylersburg，Madera

佐治亚州：Adairsville，Auburn，Avera，Baxley

佛罗里达州：Bascom

阿拉巴马州：Grane Hill，Graham，Perdido Beach

亚利桑那州：Elkins

俄克拉荷马州：Kemp

得克萨斯州：Mexia，Westfield，Stafford，Placedo

加利福尼亚州：Nevada City

很遗憾，我没有找到缅因州的城市！[20]（克里腾登）

20 缅因州是本书作者的根据地，所以特别提出来。

310° 回文素数

1980 年 11 月《数学疑难》（*Crux Mathematicorum*）杂志刊登了一张数表，包括所有 93 个 5 位回文素数和 668 个 7 位回文素数。计算是在滑铁卢大学一台 PDP－11/45 计算机上完成的。在 9 位回文素数里有一个特别有趣，345676543，是杂志编辑索弗（Léo Sauvé）提出的，他还指出有 5172 个 9 位回文素数。

大师的娱乐数学

广受数学界尊敬和爱戴的特里格（Charles W. Trigg），在很长时间里是数学娱乐之王。他凭着灵活机智的思想，多年来为众多杂志贡献了数学娱乐材料，令读者不禁惊讶他那无穷的创造力。在这个单元里，我们举几个例子，主要代表特里格技巧的一面；其实，他创作的数学娱乐很容易编成一本专门的书。

千万别以为特里格除了创作娱乐数学外就没做过其他数学。事实远不是那样的。他独立（有时与人合作）完成过大量严肃的数学论文，他的名字几乎出现在所有的美国数学杂志和许多国外数学杂志。他是美国一流的最多产的问题专家，曾担任《美国数学月刊》问题专栏编辑。

他现在是洛杉矶城市学院荣誉教授和荣誉系主任，那里的人们都亲切地记得他高超而富有启发的教学技艺和卓越的数学才能。他还写过一本迷人的书，《数学急智》（*Mathematical Quickies*, McGraw - Hill, 1967; Dover1985 年重印），应该成为每个数学老师的必备读物。总之，特里格是一个奔忙不息的人，一个著作等身的人。

311° 集合游戏

下面的一些说法是大家十分熟悉的：

a covey of quail(鹌鹑)	a herd of cattle(牛)
a gam of whales(鲸)	a pride of lions(狮)
a school of fish(鱼)	a gaggle of geese(鹅)
a bouquet of pheasants(雉)	an exhilaration of larks(云雀)[21]

描述一定集合的量的名词，起初似乎是用来描述动物（就像上面的例子）；而有些应用是和英语语言一样古老的。

几年前，流行着一种游戏，用集合状态的名词来描写人群，而不是动物。1986 年，里普顿（James Lipton）提出了一个内容广泛的清单，下面是几个例子：[22]

an impatience of wives	an obeisance of servants
a flush of plumbers	a shush of librarians

21 这些短语都说“一群”动物，但不同的动物搭配不同的量词。

22 这些推广的“量词”，都是根据描述名词的典型特征选择的，如“妻子的急躁”，“仆人的顺从”，“天文学家的星系”等等。后面的例子也一样，读者查字典看看，可以体会这些名词搭配的趣味。

a rash of dermatologists
a column of accountants
a galaxy of astronomers
a fifth of Scots

后来的玩家又增添了新的内容，例如

a pile of nuclear physicists
a grid of electrical engineers
a little of geneticists
a stack of librarians
a peck of kissers
a press of journalists
a set of pure mathematicians
a magazine of editors
a wing of ornithologists
a complex of psychologists

在这些清单里，数学几乎都被忽略了。为了弥补这个重大缺陷，特里格在 1982 年列举了 40 个精心选择的例子，下面是其中的一些：

a mapping of cartographers
a calculation of arithmeticians
a congruence of number theorists
a correlation of statisticians
a circle of geometers
an aberration of angle trisectors
a distribution of topologies
an integration of analysts
a printout of computers
a rationalization of fractions
an incomprehensihility of symbols
a quibble of logicians
a foundation of axioms
a restriction of conditions
a paucity of even primes
a plethora of digits

在特里格的鼓动和努力下，这张数学清单已经很长了。

312° 三年级同学的贡献

三年级老师向同学们解释用不同的英文单词来描述某个群

体。例如，一群羊是“flock”，一群鹌鹑是“covey”。接着她要同学们描述其他动物。说到骆驼时，一个孩子怯生生地问，“carton?”[23]

23 “骆驼”是有名的香烟品牌，所以小孩儿想到了“一盒”(carton)。

313°“妈妈数学”

几年前，数学家中间还流行着另一种娱乐“运动”，即所谓的“妈妈数学”（*mama-thematics*）。下面是其中的几个例子，都是娱乐大师特里格提出的，清楚地说明了这种游戏的本质特征：

爱因斯坦妈妈对儿子说：“你呀，我老说你要少玩儿那个小提琴，多想想有关的事情（relatives）。”[24]

24 Relatives 也可指“相对论”。

妈妈对儿子奥尔玛（Omar Khayyam）说：“你的代数和天文学大概得了那壶酒的好处，可它们不能带来面包。”[25]

25 奥尔玛即波斯大诗人，《鲁拜集》作者，也是数学家和天文学家。有首优美的小诗是这样写的：“树荫下放着一卷诗章，一瓶美酒，一点干粮，有你在这荒原中傍我欢歌——荒原呀，啊，便是天堂！”（郭沫若译）

妈妈对阿基米德说：“我早就说过，你真是还没长大，整天玩儿那个沙箱子！”[26]

26 阿基米德临死前还在玩儿沙子呢。

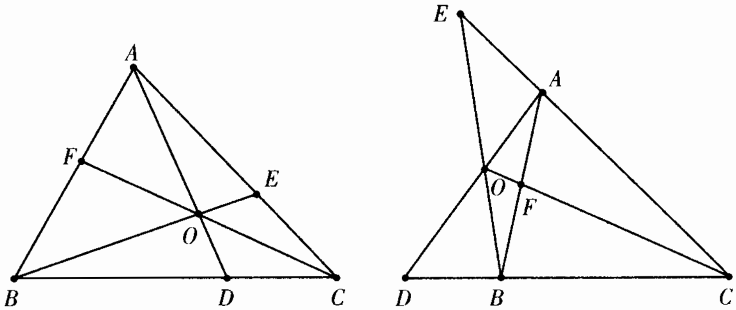
妈妈对吉野（Y. Yoshino）说：“很高兴你在电脑时代还忠实于算盘，你能指望它。”[27]

27 吉野写过关于日本算盘的书。

纳皮尔妈妈对儿子说：“我听人说你的骨头木头什么的，到底什么意思？人家还以为你有一条木腿呢。”[28]

牛顿太太对儿子艾萨克说：“别到我这儿来讨怜悯。我说过一次了，我还要告诉你一百次，别坐在那棵苹果树下。”

妈妈对塞瓦（Giovanni Ceva）说："还好你没去做棒球手，老是往禁区里跑。"[29]



塞瓦定理

妈妈对玛丽亚（Maria Agnesi）说："如果你不停止梦游，人家会把你当巫婆的！"

巴贝奇太太对儿子说："查尔斯，你太懒了，不能做心算，所以你才造一台机器来替你计算。那给我的小孙子树立了什么榜样呢？"

妈妈对欧几里得说："我为你的著作感到骄傲，可我一点儿也不懂。"

妈妈对斐波那契说："难怪你想要那些复活节小兔子。"[30]

妈妈对卡丹说："你为什么不能和那个结巴的年轻人友好相处呢？"[31]

妈妈对费马说："如果边上的空白太少，你怎么不写在

28 "纳皮尔骨头"其实是一种刻在骨头上的计算工具，参见后面"90 分的数学幽默"（38）。

29 塞瓦（Giovanni Ceva，1647～1734）是意大利数学家。他有个定理说，三角形顶点到对边的三条直线交于一点，只要它们分割三边的比例乘积为 1：$BD/DC*CE/EA*AF/FB=1$（如图）。

30 斐波那契数列据说是从兔子繁衍问题产生的（参见《走进数学圈》114），而小兔子是复活节（春分月圆后的第一个星期天，可能是 3 月 22 日和 4 月 25 日之间的任何一天）的象征之一。

31 卡丹和那个"结巴"的纠葛见《走进数学圈》131～134。

空白页上呢?”[32]

香克太太对儿子威廉（William Shanks）说：“你该用计算机的。”[33]

布丰太太对儿子说：“你怎么突然那么笨了，把针扔得到处都是?”[34]

妈妈对罗巴切夫斯基说：“如果平行线分离了，为什么穿越西伯利亚的铁路并没有多少车祸发生呢?”

妈妈对阿基米德说：“妈妈不知道它丢了，既然你已经找到了，干吗还大声叫喊呢?”

戴德金太太对儿子说：“我想你需要用那把刀来分割。”

康托太太对儿子说：“我很高兴你不再为数学歌唱了。”

康威太太说她的儿子（John Conway）：“他小时候就是个游戏迷。”

帕斯卡太太说她儿子布莱斯（Blaise Pascal），“当他和那些赌徒搅在一起，陷入那个三角阵时，我真怕我的布莱斯会厌倦享受生活（blasé）。”

32 这句话的意思，参见《走进数学圈》180。

33 香克曾把 π 算到 707 位，可是从 528 位开始错了。

34 布丰针的故事，见《走进数学圈》290。

314° “藏头的”节日

下面的短语都是数学名词的字母重新排列而成的，原来的名词的第一个字母组成一个节日的名字：

（1）A TOURING LATIN　　（2）HE GOT NAP

(3) CAN RENT GAT

(4) PAIN IN EAR

(5) TIME IN SACK

(6) TEN BUDS

(7) TREE TAGS

(8) 'TIS GREEN

(9) VIOLET CAR

(10) A LIMIT IN FINES

(11) WIN ON A TEN

(12) RED GIANT

(13) DON SUIT IN CITY

(14) THAT GIRL IS MONA

(15) I DARE TONY

相应的数学名词是

(1) Triangulation

(2) Heptagon

(3) Arctangent

(4) Napierian

(5) Kinematics

(6) Subtend

(7) Greatest

(8) Integrers

(9) Vectorial

(10) Infinitesimal

(11) Newtonian

(12) Gradient

(13) Discontinuity

(14) Antilogarithms

(15) Y – ordinate[35]

35 显然，"藏头的"节日为 Thanksgiving Day（感恩节）。见特里格《中学科学与数学》，1966 年 12 月。

315° "藏头的"节日问候

下面的短语都是数学名词的字母重新排列而成的，原来的名词的第一个字母组成一句节日问候：

(1) A ST. LOUIS MENU

(2) LET ME YEARN

(3) APPEAR TO MIX

(4) G-MEN SET

(5) NO TIRADE

(6) RUN LAME

(7) SIT CATS, SIT

(8) DATE GU ARD

(9) TORO

(10) ALL ARE QUIET

(11) SAXON PINE　　(12) TORE HEM

(13) ON AIR TRAIL　　(14) NOT A TONI

(15) STAG TREE　　(16) SAT RIGHT

相应的数学名词是

(1) Simultaneous
(2) Elementary
(3) Approximate
(4) Segment
(5) Ordinate
(6) Numeral
(7) Statistics
(8) Graduated
(9) Root
(10) Equilateral
(11) Expansion
(12) Theorem
(13) Irrational
(14) Notation
(15) Greatest
(16) Straight[36]

36 见特里格《中学科学与数学》，1962 年 12 月。

316° 咖啡专家

在继续分享特里格的数学娱乐之前，我们插入几个有趣的关于他本人的故事。

1916 年，特里格成为匹兹堡大学梅龙（Mellon）产业研究所的研究人员，负责开发可溶性咖啡的生产流程。他们将底特律酿造厂大楼改造来生产速溶咖啡，起名为“分秒咖啡”和“咖啡精”。尽管流程效率高，产品质量好，但还是因为资金不足而破产了。1924 年，特里格到了洛杉矶。

在 1916 年和 1924 年间，特里格在《茶与咖啡贸易杂志》发表了 32 篇关于咖啡、茶和香料的化学的文章，另外还有 132 篇短文和 32 篇社论。在这些文章中，“香料里的健康和幸福”赢得了 1923 年美国香料贸易协会全国竞赛的第一名，并在世界上

广为流传。特里格在尤克斯（W. H. Ukers）的 1922 年版《咖啡全书》里写了标志性的两章：“咖啡豆的化学”和“咖啡饮料的药理学”。



图 36

317° 名声大震

1955 年 2 月 5 日，特里格接替教务长，在洛杉矶城市学院（LACC），当着众多电视和照相机镜头，和女演员柯罗斯碧（Katherine Grant Crosby）登记结婚。哥伦比亚电影公司借此机会宣布迷人的女主角第一次怀孕了。于是，LACC 和特里格史无前例地因为一件事情赢得了众多的关注。LACC 的同学们把他们从《生活》、《时代》杂志以及 28 州和新西兰的报纸上搜集的 449 张剪报装订成册，送给特里格。

318° 伟大的解题专家

特里格发表的第一篇数学作品是解决了 1932 年 4 月《中学科学与数学》的问题 1207。从那以后，特里格为不同杂志的挑战性难题提交了 3577 个正确的解答。发表了其中的 1011 个。另外，他还为不同刊物的问题专栏编写了 630 个问题和 53 个 quickies。而且，在后来的年月里，他在国内外 31 家数学杂志上发表

了312篇论文和短文、197篇书评、21封致编辑部的信和36个数学程序。

319° 赞美

特里格退休时，柯特（Nathan Altshiller Court）教授说了一段话：

“你的问题专家的名声并不仅在于你的作品。你为你的贡献赋予了一种难能可贵的品质，那就是风趣。是啊，数学也可以有风趣，你就是证明。”

320° 折纸

娱乐数学的一个有趣分支就是折纸，特里格也为我们留下了一些折纸的珍品——用正六边形折成正四面体，从普通的信封引出有趣的折纸问题。

1945年，特里格从海军退伍回到洛杉矶城市学院，不久就对折纸的几何产生了兴趣。于是，他想到用镶嵌的纸板和橡皮筋做正多面体，在办公室挂满了五颜六色的风铃，还有些则经常拿到行政大楼去展览。就在他退休之前，工程学系还赠他一张彩色的文凭，授予他P. F. F. D.（“折纸多面体博士”）学位。

321° 颠倒的数学家姓名

(1) A CALM RUIN　　(6) I POLL NO U. S. A.

(2) AND RAG　　(7) PAR ON ICE

(3) MA, JUAN RAN　　(8) NO HARPS

(4) ARM ONCE　　(9) AIM HIS CLUB

(5) I'M THERE　　(10) A HILL TOP

相应的数学家名字是

(1) Maclaurin
(2) Argand
(3) Ramanujan
(4) Cremona
(5) Hermite
(6) Apollonius
(7) Poincaré
(8) Raphson
(9) Iamblichus
(10) L'Hôpital[37]

37 见特里格，《数学杂志》，1961 年 3、4 月。

322° 字母和数字

《游戏》杂志编辑肖尔茨（Will Shortz）设计了一种游戏：说一句包含一个数字话，只留下某些词的第一个字母，然后请读者还原那句话。例如，"26 = L. of the A." 原是 "26 letters of the alphabet"（字母表的 26 个字母）；"12 = E. on an O." 原是 "12 edges on an octahedron"（八面体的 12 条棱）。根据这个法则，我们来还原下面的短语：

(1) 6 = F. in a F.
(2) 2 = O. E. P.
(3) 3 = M. O. P.
(4) 4 = L. E. S.
(5) 5 = S. on a P.
(6) 6 = S. P. N.
(7) 7 = T. O. P.
(8) 8 = S. E. C.
(9) 11 = O. T. D. P. P.
(10) 12 = M. A. N.

答案是：

(1) 6 feet in a fathom（6 英尺 1 寻）
(2) 2, only even prime（惟一的偶素数）
(3) 3, minimum odd prime（最小的奇素数）
(4) 4, least even square（最小的偶平方数）
(5) 5 sides on a pentagon（五边形的 5 边）

(6) 6, smallest perfect number（最小的完全数）

(7) 7, third odd prime（第3个奇素数）

(8) 8, smallest even cube（最小的偶立方数）

(9) 11, only two-digit palindromic prime（惟一的两位回文素数）

(10) 12, minimum abundant number（最小的盈数）[38]

38 一个数等于其真因子之和叫完全数；小于真因子之和就叫盈数（参见《走进数学圈》54）。见特里格《娱乐数学杂志》Vol. 15 (3), 1982 ~ 1983. © 1982, Baywood 出版公司。

323° 搭配

你能将下面左边的词语与右边的数字搭配起来吗?

Banquet（夜宴）	00
Cry of an impatient golfer(一个急躁的高尔夫球手的叫喊)	11
Hospital ward（医院病房）	22
Naturals（骰子游戏）	33
Emphatic denial（断然拒绝）	44
Short and fat（又矮又胖）	55
Bet on 7 races and lost on 6（赌7场输6场）	66
Successive hat tricks（连中三柱）	77
The house number（房号）	88
Abbreviated ballet skirt（芭蕾短裙）	99

答案是:[39]

Banquet—eighty ate	88
Cry of an impatient golfer—Fore! Fore!	44
Hospital ward—sixty sicks	66
Naturals—on the first throw in dice play, seven or eleven	77
Emphatic denial—Nein! Nein!	99

39 这些大概算英语的“歇后语”。例如，高尔夫球手习惯叫喊“前面注意(Fore! Fore!)”；“short and fat”形容一个人又矮又胖，就像“5×5”的正方形。“tutu”是芭蕾短裙，发音同“22”。“hat trick”是板球比赛中连中三柱。

Short and fat—five by five	55
Bet on 7 races and lost on 6—won one	11
Successive hat tricks—three goals scored by one player in each of two games	33
The house number—the double zero in roulette	00
Abbreviated ballet skirt—tutu	22[40]

40 见特里格《娱乐数学杂志》Vol. 13 (4), 1980 ~ 1981. © 1980, Baywood 出版公司。

324° "十全十美"

根据下面的单词、短语或数字的描述，你能在空白处填写一个恰当的英文字母吗？这样你能检验自己是不是一个"十全十美"的人。

__slope（山坡）

__base of natural logs（自然对数的底）

__distance from the in center to a side of a triangle（从三角形内心到边的距离）

__quotient of two successive terms of a G. P.（几何级数相邻两项之比）

__ordinate（坐标）

__constant（常数）

__two hundred（200）

__abc/4Δ

__$\sqrt{(-1)}$

__(a + b + c)/2

__the degree of an equation（方程的阶）

__five hundred（500）

__side of a triangle opposite ∢α（三角形角 A 的对边）

__orthocenter（垂心）

__1，7，13，19...

__genus of a surface（topology）（曲面的亏格）

__axis（轴）

__representation of an integer（整数的表示）

__eccentricity of a conic（圆锥曲线的离心率）

__looks like a primitive cube root of unity（看起来像立方单位原根）[41]

__one hundred and sixty（160）

__noon（中午）

__high grade（高年级）

__not N，E，W（不是 N，E，W）

__commonly the first term of a progression（通常作为级数第一项）

__150[42]

__spherical excess（球面角盈）[43]

__coefficient of the squared term in the general quadratic（一般二次方程二次项系数）

__one-half the space diagonal of a cube（立方体空间对角线的一半）

所填字母连起来是下面一句话：

Merry CHRisTMAS anD a HA. P. pY New YEaR[44]

325° 2 的幂次的故事

两队女球手比规定时间早很多就到了高尔夫俱乐部，于是，

41 1 的三个方根可以表达为 $w^2+w+1=0$ 的解的幂，即 w^0，w^1，w^2，w 就叫“原根”。

42 $Y=150$，$T=160$，$H=200$，见《兰登书屋词典》（未删节本）。（原注）

43 球面三角形内角和大于 180°，超出部分即“角盈”。

44 “圣诞快乐，新年好”。见特里格《娱乐数学杂志》Vol. 15（2），1982～1983. © 1982，Baywood 出版公司。

2^3 8个人走进餐厅吃饭（eight ate）。

后来，一队人迫不及待要开始了，

2^2 4个人对着前面的4人大喊“躲开！”（four called “Fore!” for the fore four to move on.）

比赛结束后，有两个并列第一名，于是

2^1 给2人都发了芭蕾舞短裙做奖品。(tutu to two, too)

然而，大家都要求继续比赛，直到

2^0 一个人获胜者。(one won)[45]

45 见特里格《娱乐数学杂志》Vol. 14 (1), 1981～1982. © 1981, Baywood出版公司。

326° 数字的含义

1 是逍遥的自我，

2 是幸福的一对，

3 像婚姻走上了岩石，

4 是方正刚直的象征，

5 是手里的一副牌，

6 是第一个完美的数字，

7 能带来无限的幸运，

8 是那只倒霉的球，[46]

9 点敲响宵禁的晚钟，

0 是莫斯泽尔[47]的大名。[48]

46 原文“the ball you get behind”是从“behind the eight ball”演化来的。打台球的人知道，8号黑球是不能随便打的。

47 Zero Mostel (1905～1977)，美国演员。

48 见特里格《数学教师》，1969年4月。

327° 不变的行列式

问题E1016［1952, 328］，由密执安大学安宁（Norman Anning）提供。(《美国数学月刊，1953年2月》)

找出以下情形的相似元素：

(a) 放大一个因子

(b) 在鼻子上抹粉[49]

(c) 给教堂修新台阶

(d) 把退休教授留在校园

(e) 在下列行列式中加入 B, C, D:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ B & a^3 & 1 & a \\ C & D & a^3 & 1 \end{vmatrix}$$

洛杉矶城市学院特里格的解:

行列式的值 $(1-a^4)^3$ 独立于 B, C, D 的值。因此,步骤(e)只是改变行列式的样子而不会改它的值。于是,(a),(b),(c),(d) 和 (e) 的惟一相似之处就在于它们改变了主体的外表。同样的要素也存在于

(f) 给玫瑰另取一个名字[50]

(g) 把十进制整数变成 12 进制

(h) 给百合镀金[51]

(i) 给政客刷石灰水

(j) 授予荣誉学位

328° 积分公式

根据著名的积分公式[52]

$$\int d(\text{cabin})/\text{cabin} = \log \text{cabin} + C = \text{houseboat}^{53}$$

我们有:

(1) $3\int(\text{ice})^2 d(\text{ice}) = \text{ice cube} + C = \text{iceberg}$

49 Powdering the nose,是去卫生间的委婉语。

50 莎士比亚《罗密欧与朱丽叶》有句名言:"What's in a name? that which we call a rose / By any other name would smell as sweet."

51 Gilding the lily,意思是"画蛇添足"。

52 见特里格《数学教师》,1970 年 12 月。

53 参见《告别数学圈》A352。下面的积分结果和它等号后面的单词读音相近。能看懂积分的读者都能明白它们的意思,译成中文就无味了。

(2) $2a\int \text{real}\ d(\text{real}) = a\ \text{real square} + C$ = movie hero

(3) $t\int du = c + ut$ = wound

(4) $\int d(\text{art}) = \text{art} + C$ = Cart

(5) $\int d(\text{wall}) = \text{wall} + C$ = dike

(6) $p\int d(\text{lane}) = p(\text{lane}) + C$ = hydroplane

(7) $4\int dt = 4t + C$ = sea for t = battleship

(8) $\int_1^2 dx/x = \ln 2$ = lean – to

(9) $10\int_0^t dx = 10t$ = tent

(10) $8\int_0^t dx = t(4)(2)$ = tea for two

(11) $a\int_0^1 dw/\sqrt{1-w^2} = a\pi/2$ = half a pie

(12) $\int_0^{\text{board}} \cos y\ dy$ = sin board

(13) $\int_0^{\text{ema}} \cos x\ dx$ = sin ema = movie

(14) $-\int_{\pi/2}^{\text{salad}} \sin x\ dx$ = cos salad = romaine salad

(15) $\int_0^{\text{hide}} \sec^2 z\ dz$ = tan hide

(16) $-\int_{\pi/2}^{\text{springs}} \csc^2 v\ dv$ = cot springs

(17) $\int_{-1}^{\text{champagne}} \sec u \tan u\ du$ = sec champagne + sec 1

= dry champagne + dry one

(18) $\int_{up}^{down} \sinh x \, dx$ = cosh down − cosh up

= 2 cosh down = to quiet down

(19) $8\int_{i\text{-tooth}}^{eye} x \, dx$ = eye(4)eye + tooth(4)tooth

(20) $4\int_{-m}^{m} dx = (m8 + 8m)/2$ = mate ate'm, too

329° 名人姓名游戏

十多年前曾流行名人姓名游戏，特里格将它推广到数学家的姓名。下面给几个特里格的作品。更详细的清单见 1974 年夏《娱乐数学杂志》。[54]

54 见特里格《娱乐数学杂志》Vol. 7 (3), 1974. © 1974, Baywood 出版公司。

Pity SALMON, the poor POISSON!

Where has J. D. GERGONNE?

Despite his cutting ways, was DEDEKIND?

Who dares to pull ROBERT'S. BEARD?

Did his method of exhaustion sour him so that he was ANTIPHON?

As active currency in the U. S., do you ever expect to C. GOLDBACH?

Would his preferred avocation B. TAYLOR?

If he found a FIBONACCI bonanza, would VERNER HOGGATT?

If his girl got lost, would J. A. H. HUNTER? Or would TODHUNTER?

In perplexity, when he ran his fingers through his hair did the WHITEHEAD-RUSSELL?

He drew a BEDE on the BALL, but in making the POOL shot, which cushion did LEON BANKOFF?

How well can RONALD C. READ? Does DALE SEYMOUR? Which is the RUDERMAN?

Which provides the best means of driving through the maze of mathematics, a FORD of an OLDS?

Does A. C. BRADBURY his mistakes, or does he carry D. CROSS?

For JOHN PECKHAM or BACON is necessary to maintain his GROSS, rotund BOMBELLI, even though the DERNHAM is HIGH and RICH.

Which has the richer overtones, ABEL of Norway or thE. TEMPLE BELL?

Which R. BOYD watchers most likely to C. WREN, EAGLE, CRANE, PEACOCK, HERON, or OWLES? Beware the FOWLER who is an ARCHER with SPEARS and TRAPP!

Was COMTE DE BUFFON a probability hunt for a needle in a pi?

If we do not appreciate their theorem, will STEINER – LEHMUS? Is DERRICK LEHMER?

It is hard to tell about RAPHSON, whether he CANTOR won't put on the EUCLID. [55]

55 数学家的名字的读音，在不同场合可以听成不同的单词，从而使句子听起来有意思。例如，第二句就是“Where has J. D. Ger gone?”读者试试看，从下面的名字读音能联想到什么有意思的单词。

杂　说

330° 里根和数学

美联社纽约报道——里根总统在30年前的一封信中承

认，还是学生时，“我数学成绩非常糟糕，只学了一点绝对必须的东西。”

这封信将于4月15日在曼哈顿斯万（Swann）美术馆拍卖，是流入市场的仅有的几封里根信件之一。

写信的日期是1952年1月4日，当时里根还是演员，尚未进入政坛。信写给得克萨斯福特沃斯（Fort Worth）的特维戴尔（Tom Tweddale），是一个高中学生，向里根求教怎样才能成为一名体育解说员——里根从前的工作。

承认数学薄弱的同时，里根忠告年轻人，“我再说一遍——要接受大学教育。”

美术馆估计这封信价值在3 000和4 000美元之间。

——班戈每日新闻，1982年3月9日

331° 关于米制

世界其他地方的人逼着我们使用米制大概是对的，这样能方便大家撒同样的谎。我们还是不要替科学界为它祝福了吧。(Kenneth E. Boulding)

332° 加菲尔德总统与米制

1879年，在波士顿旧南教堂的一次会议上，一群狂热者组织了保卫和完善度量体系国际研究所。研究所的目的是修改度量单位制，使它符合埃及大金字塔建筑所隐藏的神圣的度量标准，对抗法国的“美学度量体系”。后来的美国总统加菲尔德(James A. Garfield) 曾是研究所的热情支持者，但请他担任所长时，他拒绝了。

333° 看情况

加菲尔德做海尔曼（Hirmam）学院院长时，有学生问他要上的数学课，“课程能缩短吗？我学不了那么多。”加菲尔德回答，“那要看你想学什么。上帝想要一棵橡树时，用了100年；而他想要南瓜时，只用了3个月。”

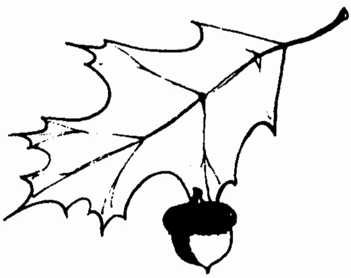


图37

334° 品尝

数学教授上他的第一课时，先列举了一个很强的理由，一个学生站起来问，“你能证明这门课真有那么好吗？”

教授来到同学的课桌前，打开他的午餐，拿起一根香蕉，剥了皮，当着全班同学的面把它吃了。吃完的时候，他转向那个同学，问他，“你知道那只香蕉的滋味如何吗？”

“不知道，”他回答，“只有吃过的人才知道。”

“这门数学课也是这样的，”教授最后说，“你得亲自去品尝。”

335° 总有更容易的方法

有人问证明某个命题是什么感觉，数学家回答，证明一个定理就像看见一座山峰，而且想着去登上它的顶点。我们搭起一个

大本营，然后开始沿着陡峻的山路攀登，克服崎岖险阻，挣扎着迈出艰辛的脚步，一尺一寸地延伸我们的旅程。最后，登上山顶时，我们俯瞰险峰，环顾四方的原野乡村——这时才发现山的那一边有一条大马路！（Robert J. Kleinhenz）

336° 危险行为

哈佛学数学的一个学生，大概喜欢引用（而远不是应用）伟大的耶鲁分析学家皮尔旁特在一本书中的证明，[56]他这么做是很危险的。那样的证明几乎不可能被接受。

56 皮尔旁特（James Pierpont，1659～1714）是耶鲁大学创始人。

337° 作者 *Schnitt*

我做了大约7年的中学数学老师，有时候想起自己经常向许多同学推荐贝尔的《大数学家传》（*Men of Mathematics*），而自己从未从头到尾读过一遍，于是我开始读它。每当同学走进我的办公室，我常会和他们分享我刚学到的一些东西。有一天，高年级的一个同学（也许是我所知道的最会读数学的高中学生）来到我办公室。我便开始卖弄我最近读到的东西，也想考考他。我问他是否记得下面一段引文的作者：

> The heart of Dedekind's theory of irrational numbers is his concept of the "cut"... (*Schnitt*)[57]

57 "戴德金无理数理论的核心是他的'分割'概念。"

他皱了皱眉，说不知道。

"哈！"我得意地说，"你看过那本书吗？"（其实他已经读过好几回了。）然后我告诉他，那段话的作者是Schnitt。

他似乎很疑惑，要我打开那一页。然后，他带着失望的神情看着我，轻声说，"伦纳德（Leonard）先生，*Schnitt* 是'分割'

的德文单词!”[58]

58 见 William Leonard《二年制学院数学杂志》,1979 年 1 月。

338° 烧开水

一个学数学的学生走到教授跟前,提出如下问题:

“给你一个炉子,附近的一张桌子上还有一只装满水的平底锅。你的任务是把水烧开。请解释你想怎么解决这个问题。”

教授想了一会儿,然后接着说,“先看看锅,如果水开了,任务就完成了;否则……”[59]

59 见 Thomas R. Davis《二年制学院数学杂志》,1979 年 1 月。参见《重回数学圈》R220。

339° 显而易见

我在加州大学洛杉矶分校(UCLA)的一个教授想证明一个形如“A 当且仅当 B”的定理。上课铃响之前他就开始写,他不停地写(还一边嘟哝着),密密麻麻地写满了三面墙壁的黑板,下课铃响了还在写。等下一堂课的同学涌进教室,他才停下来。这时他才只证明了“假如 A 则 B”。他环顾满是注记的黑板,然后舒了口气,高兴地宣布,“反过来看,结论同样是显而易见的!”[60]

60 见 David E. Logothetti《二年制学院数学杂志》,1979 年 3 月。

340° 还是显而易见

罗丁(Burt Rodin)是哈佛的年轻博士,多年来还带着一个几乎没有薪水的头衔,他决定去听一个资格更老、更有名的教授的课。课讲完后,大教授就站在那儿,一句话也不说。经过几分钟痛苦的沉默之后,一个和别人没什么不同的学生举手问他,“嗯,啊,教授先生——您在做什么?”教授回答,“我只是在想,我接着要讲的是不是显而易见;我觉得它是,所以我不讲了。”[61]

61 见 David E. Logothetti《二年制学院数学杂志》,1979 年 3 月。

341° 数学家在工作

柯蒂斯（D. R. Curtiss）提出，也许可以在芝加哥世界博览会上普及数学。那时拖车刚流行，他建议在拖车上装两张桌子和两把椅子，停在会场，并打出“数学家在工作”的标语。

342° 诚恳的退稿信

许多作者投稿老是收到“我们很遗憾……”的退稿信，对他们来说，下面有一封很好的安慰信。

一个英国作者给中国的一家杂志投了一篇经济学的论文，收到了如下的退稿信（引自《世界商务周刊》）：

“我们无比愉快地阅读了您的大作。如果我们发表了您的文章，就不可能再发表其他任何低水平的文章了。很难想象我们能在未来一千年里看到同样水平的作品，我们只好遗憾地退还您的大作，并千万次地请您原谅我们的短视和怯懦。”[62]

62 见《数学杂志》，1981年5月。

343° 数学的适用性

正如某些人所坚持的，数学的适用性一点儿也不神秘。我们从事物抽象出来的东西都可以还给它！[63]

63 见 R. L. Wilder《数学基础引论》。

344° 记忆的力量

我们都知道书能燃烧——但我们更知道书不可能被烈火毁灭。人死了，书永远不死。没有什么人，也没有任何力量，能毁灭记忆。（罗斯福）

345° 完美的思想

是印第安人为我们带来了用10个符号表示所有数字的方法。

他们的每个符号都有一个位置决定的数值和一个绝对值，这种深刻而重要的思想在今天看来也许太简单，因而其真正价值常常被忽略了。正是它给计算带来的那种简单和方便，才使我们的算术成为第一流的实用性发明。这样的辉煌成就，连古代最伟大的两个人物阿基米德和阿波罗尼都没能发现，想到这一点，我们该更加地欣赏它。(拉普拉斯)

346° 控诉

杂志上的数学交流太精简了，没有任何直觉的背景，于是有人说，许多发表的数学论文只有三个人读过——作者、编辑和审稿人。

347° 令人作呕

有一次，在飞机上，一个饶舌的快乐绅士在我旁边，他一坐下就打开话匣子。他滔滔不绝说不完，后来问我，“你是做什么的?”

“我教数学,”我回答。

他突然痉挛地咳嗽一声，站起来，嘟哝道，“抱歉,”然后双手捂着嘴，闪电式地跑到机舱后面去了。他回来时，静静地坐在我身后几排的位置上。

348° 编辑的意见

在我的《数学史引论》第五版的手稿中，我针对牛顿的流数思想和莱布尼茨的微分思想说，“英国数学家尽管长期依赖于(clung long to) 他们领袖的思想……” 文字编辑删去了“长期”一词，在页边写道，“我想 Clung Long 是中国数学家，不是英

国的。”[64]

64 参见前面 A297 那个“中国农民”。

349° 圣奥古斯丁的告诫

我上学时，一个学神学的朋友常取笑我，他引用据说是圣奥古斯丁的告诫说，要当心数学家，他们会遭诅咒的。最近我又看到了这句话。数学的名声不大好，不过这句贬损的话却是谣传：圣奥古斯丁在写“数学家”时，和许多经典作家一样，意思是“占星家”。原文是这样的：

Bono christiano sive mathematici sive quilibet inpie divianti-um, maxime dicentes vera, cavendi sunt, ne consortio daemonio-rum animam deceptam pacto quodam societatis inretiant.

大意是，一个好的基督徒必须当心占星家和其他通过非神圣办法制造预言的占卜者，特别当他们的预言成真时，更要谨慎小心；要警惕不要与魔鬼为伍，被他们俘获了自己的灵魂。

(*De genesis ad literam*, Liber 2, Caput XVII, 见 *Corpus Scriptorum Ecclesiasticorum Latinorum*, Vol. 28, part I (Vol. 3, Part 1 of Augustine's works), edited by J. Zycha, Prague-Vienna-Leipzig, 1894, pp. 61～62.)[65]

65 《拉丁神学大全》(*CSEL*)，原是维也纳学院在 1866～1957 年间编辑的教会文献总集。见 Ralph P. Boas《美国数学月刊》，1979 年 2 月。

[奥古斯丁这段话的通常说法，见《告别数学圈》A149。数学家们应该高兴，鲍斯教授为我们提出了正确的理解。实际上，圣奥古斯丁很看重数学，还曾经说他所能想到的最完美的两件事情就是伦理学和数学。]

350° 学生的智谋

听人抱怨学生缺乏智谋。大约 1940 年，上我微积分课的一个同学抱怨说，有一道作业题他不会做，因为他不懂什么是水平线。

有一年，我给数学专业的一个大班上课，多数学生并不怎么喜欢它。填课程评估表时，在问题“你对这门课最感兴趣的是什么”下，有个同学写的是，“教授收集的蝶形领结。”[66]

66 见 Ralph P. Boas《二年制学院数学杂志》，1979 年 1 月。

351° 数学与牡蛎

如果牡蛎肚子里钻进了小石子儿，它会平静地将它“化解”，通过分泌一种物质来减轻摩擦，覆盖痛处，更神奇的是，那物质会硬化，形成珍珠。从来没被外来东西刺激过的牡蛎，当然永远不会遇到那种痛苦。但是，不经历痛苦就不会有珍珠。同样，在数学中，令人痛苦的问题往往孕育着新的数学珍宝。



图 37

352° 教与学的哲学

免费数学课

（周一到周五）

不过你得自带容器，而且你必须根据其容量大小和你愿意承

担的工作量，将它多多少少地装满。学习助理（有时也委婉地称“老师”）会为你提供专门的意见、忠告和指导，并举例说明。不过，在最后的分析中，你必须为你的学习做你需要做的事情——正如我必须做我自己的事情一样。而理论恰恰相反，不论用心多么良苦，它们都是错误。

正如一个诗人说的，

让我们行动起来，
　　带一颗“命运”的心，
不断成功，不断追寻，
　　学会劳动和等待。

他还说，

不论步伐有多直，
　　不论纸卷多沉重，
我是我命运的船长，
　　我把握我灵魂的方向。

就是这种神奇的东西——它就是数学。如果你想它，就来拿它吧。如果你不想，就请站到一旁——不要挡住了别人的步伐。选择在你。愿上帝保佑你，保你平安，赏你应得的奖励。选择了数学的人们，请跟我来。（L. M. Christophe, Jr.）

353° 跳棋王

现在（1985）的世界跳棋冠军 30 年来还没被人战胜过。尽管一个跳棋组织悬赏 5 000 美元，也没能设计出能战胜他的计算机程序。恐怕别的游戏都不会有这样的常胜将军。

那位独霸棋坛的跳棋之王是谁呢？他是廷斯莱（Marion Tinsley），58 岁的塔拉哈塞（Tallahassee）佛罗里达 A&M 大学数学教授。廷斯莱毕业于俄亥俄州立大学，1957 年在那儿获数学博士学位，对组合分析特别感兴趣。

《跳棋百科全书》宣称，“廷斯莱之于跳棋，犹如达芬奇之于科学，米开朗琪罗之于艺术和贝多芬之于音乐。”他的记忆仿佛照相机，走完 30 步棋，他看一眼就能在棋盘上精确画出每颗棋子儿的位置。

在廷斯莱看来，跳棋与数学是互补的。他在二者之间看到了很多相似的东西。他说，解决一个优美的跳棋问题，就像精巧地证明一个数学定理。

354° 水池问题

初等代数里的许多“类型问题”都经历过漫长的历史。在《走进数学圈》13，我们描述了一个至今仍为大家所熟悉的类型问题，它至少可以追溯到公元前 1650 年左右的林德纸草。另一个历史悠久的类型问题是所谓的“水池问题”，最初问的是用流速一定的水管来灌满一池水。

确定形式的水池问题似乎最早出现于公元 100 年左右希罗（Heron）的《测量术》（*Metrica*）中。后来，它出现在丢番图（约公元 275 年）的作品中，也出现在希腊人 Metrodorus（约公元 500 年）的格言诗里。不久之后，它成为东西方共有的财富。它出现在阿尔昆（Alcuin，约公元 800 年）的系列问题中，在印度经典巴什迦罗（约 1150）的《丽拉沃蒂》中，[67] 也在后来的阿拉伯算术中。当图书开始大量印刷时，水池问题成为早期作者如丹斯托尔（Tonstall，1522）、弗里休斯（Frisius，1540）和雷科

67 参见《走进数学圈》95。

德（Recorde，约1540）等人的普通问题。

水池问题最初表现了人们对日常生活的观察，生活在地中海沿岸的人都见过用不同粗细的水管向水池灌水。可是，教科书的作者们遵循着一个有趣的规则——他们几乎毫无顾虑地相互抄袭，只需要做一点儿掩饰。所以，水池问题经历过无数的“变形”。

于是我们看到，从15世纪开始，问题不断在变化，狮子、狗、狼和其他动物都进入角色，来吃山羊的尸体。在16世纪，我们看到更多的变化，包括修房子或围墙的人——问题成了这样的形式：“假如A做某件事情需要4天，B需要3天，那么两人同做需要多少天?”

在弗里休斯（1540）的一部著作里，它演变为荒唐的饮酒问题：“某人20天喝完一桶酒，如果妻子和他一起喝，则14天就能喝完——问妻子一个人要喝几天?”随着商业的发展，问题转化为三帆船的情形：扬起最大的帆，航行需要2周，而小一点儿的帆需要3周，最小的帆需要4周——如果三帆同时张开，需要多长时间？原来的池水问题很实用，而这个帆船问题则失去了现实意义。它忽略了一个事实：三个帆会相互遮掩，所以船速并不与帆的大小成正比。当某人提出下面的问题时，它大概也荒唐到顶了：

“一个牧师5个小时能祈祷一个灵魂走出炼狱，另一个牧师需要8个小时，那么两个牧师共同祈祷，需要多少时间?”

水池问题的解涉及专门的技巧和程序，所以，在初等代数课本的“故事问题”里，还将继续出现这种类型的问题。

355° 冯·诺伊曼和一个陷阱问题

我们至今还经常看到一个老“陷阱”问题。问题涉及两列火车和一只蜜蜂。火车以不变的速度运动，分别同时离开纽约和芝加哥，沿着同一条铁路相向而行。纽约的火车出发时，一只蜜蜂以比火车还快的速度，朝着芝加哥火车飞行。当蜜蜂遇到芝加

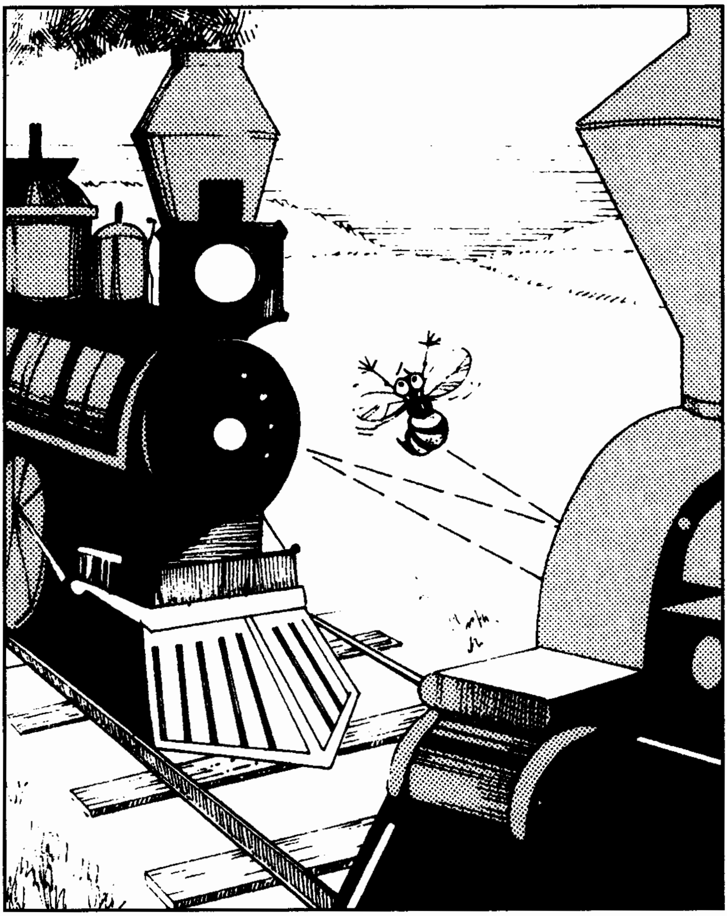


图 38

哥火车时，它掉头飞向纽约的火车。遇到纽约火车时，又掉头飞向芝加哥火车。蜜蜂在两列火车间来回飞翔，直到最后被碰头相撞的火车挤得粉碎。我们知道纽约到芝加哥有多远，那么蜜蜂一共飞了多少距离呢？

这是一个“陷阱”问题，因为不留心的人会想到去计算蜜蜂在两列火车之间每次来回的距离，然后计算这个收敛级数的总和。但还有一个简单得多的解决办法。首先计算火车相遇需要多长时间，然后，以这个时间乘以蜜蜂的飞行速度，就得到它飞行的距离。

据说，有人向数学天才冯·诺伊曼提出火车－蜜蜂问题，他几乎立刻就给出了正确答案。“噢，”出题者说，“你知道那个简便的方法。”接着他向冯·诺伊曼解释不用心的人会想到的那个复杂方法。

“哦？”冯·诺伊曼很惊讶，“还有更简单的办法？”

这个故事不太可能发生，倘若真的发生了，难道说，能在瞬间完成漫长而复杂计算的冯·诺伊曼会看不出那个简便的方法？



冯·诺伊曼

冯·诺伊曼1903年出生在布达佩斯，很快就被大家看作科学神童。他1926年在布达佩斯获博士学位，1930年移居美国，1933年成为普林斯顿高等研究院永久

成员。他在逻辑学、数学基础、算子理论、量子力学和博弈论的贡献，已经赢得了国际声誉；他还花更多的精力来确定20世纪的数学方向。他的工作气魄大，创新多，而且能近乎神奇地预见许多即将出现的重要研究领域。在第二次世界大战期间，他投身于氢弹、原子弹和长期天气预报的科学和行政事务。1957年，冯·诺伊曼死于癌症。历史将证明他是本世纪最神奇的天才人物。

356° 博莱的兴趣

法卡斯·博莱（Farkas Bolyai）是亚诺斯（János Bolyai）的父亲，兴趣很广泛。除了数学工作而外，他还花大量时间写悲剧。中年时，他将蒲柏（Alexander Pope）的《人论》翻译成西班牙文。除了对诗歌的爱好，他也喜欢音乐，喜欢拉小提琴。他还有一个奇特的业余爱好，就是制造设计新颖的烤炉。据说，因为他的一个烤炉具有特殊的通气管，为特兰西瓦尼亚地区的烤炉经济带来了一场革命。在他的房间里，到处废弃着烤炉模型，其间还有他钟爱的小提琴。墙上挂着几幅肖像，有他的朋友高斯，有莎士比亚（他所谓的“大自然的儿子”），还有席勒（他说人家是“莎士比亚的孙子”）。据说，他常把地球比作泥泞的池塘，桎梏的灵魂在其中艰辛跋涉，直到死亡。然后，一个天使解放了束缚中的自由，走向更幸福的王国。

357° 奎特雷与统计学

匈牙利天文学家和数学家奎特雷（Adolphe Quetelet，1796～1874）是统计学领域的先驱，第一次对人口普查进行了统计学分析。1829年，他分析了匈牙利的人口普查数据，发现了年龄、性别、季节、职业和经济状况对死亡率的影响。这样的分析对人

寿保险当然是至关重要的。

奎特雷提出了“平均人”的概念。统计学研究使他相信，一定人群的犯罪在某种程度上是可以用数学预测的。

最热忱地信奉奎特雷的统计学研究价值的人是南丁格尔（Florence Nightingale，1820～1910），她相信，“为了理解上帝的思想，我们必须学统计，它们是上帝的旨意的度量。”



护理学的先驱南丁格尔

358° 加倍

乌拉姆（Stanislaw Ulam）在几年前的一次讲话中估计，每年大约发表100 000个定理。听过他讲话的两个年轻数学家，后来更仔细地估计，数量还要大一倍。

359° 淫书？

布林克曼（Brinkmann）教授在给大学生上课时，提到一本

帕斯卡的书《爱的情欲论》（*Essai sur les passions que se font dans l'amour*），但没有要同学们去图书馆借它来看。当时的一个学生嘟囔，“大概没有了”。那人是维克斯勒（H. Wexler），后来成为美国气象局局长。

360° 令人难忘的因子分解

米尼玛派修道士梅森（Marin Mersenne，1588 ~ 1648）是法国数论专家，和当时许多大数学家保持着书信往来。今天人们记住他，主要是因为所谓的梅森素数，即形如 2^p-1 的素数。他在 1644 年的《数学物理思考》中，曾几次讨论那种素数。

今天我们通常将 2^p-1 记做 M_p。在 1644 年的著作里，梅森不加证明地指出，M_{251} 是合数。直到 19 世纪，数学家才发现它包含 503 和 54 217 两个素数因子，从而证明梅森的话是正确的。然而 M_{251} 的分解到 1984 年才实现。两个研究者在一台 CRAY 超级计算机上寻找了 32 小时，才发现

$$\begin{aligned}2^{251}-1 = {} & 503\times 54\ 217\times 178\ 230\ 287\ 214\ 063\ 289\ 511\times \\ & 61\ 676\ 882\ 198\ 695\ 257\ 501\ 367\times \\ & 12\ 070\ 396\ 178\ 249\ 893\ 039\ 969\ 681\end{aligned}$$

现在我们知道，对以下的指数 p，

2，3，5，7，13，17，19，31，61，89，107，127，521，607，1279，2203，2281，3217，4253，4423，9689，9941，11213，19937，21701，23209，44497，86243 和 132049，

M_p 是素数，而且在 $p<50\ 000$ 时没有其他梅森素数。

M_{132049} 包含 39 751 位，是目前所知的最大的素数，是 1983

年斯洛文斯基（David Slowinski）在加州辐射实验室 CRAY 超级计算机帮助下发现的。[68]

因为偶完全数（人们相信没有奇完全数）具有如下形式

$$2^{p-1}\ (2^{p}-1),$$

其中 $2^{p}-1$ 是素数，所以，$p=132\ 049$ 也给出一个完全数，是迄今所知的第 29 个也是最大的一个完全数。

68 梅森数的故事，参见《告别数学圈》A296～298。2005 年 12 月 15 日，Curtis Cooper 与 Steven Boone 发现了第 43 个梅森素数，$p=30402457$，有 9152052 位；2006 年 9 月 24 日，他们又发现了第 44 个梅森素数，$p=32582657$，有 9808358 位。素数有无穷多，发现素数的历程是没有穷尽的，我们的数学圈也将无限旋转下去。

余音

90 分的幽默

60 分的点滴

25 分的逻辑

90分的数学小幽默

1′ 一个男孩儿从学校图书馆借了一本代数书。三天后，他去还书，一肚子的怨言："这本书讲了好多我不想知道的代数东西。"

2′ 很多教数学的人都需要那个老苏格兰人的祈祷："主啊，在我的有生之年，让我活着吧。"

3′ "我来说明这个理论的价值，"一个心不在焉的数学教授，一边擦黑板，一边说。

4′ 数学既不是鱼，也不是兽；因此，它一定是鸟。

5′ 两个十几岁的女孩儿讨论问题。一个说，"你别泄气。今天，每个女孩儿都有一个男孩儿，每个男孩儿也都有一个女孩儿。你还能让这样的安排更好吗？"

"我没想要它更好，"另一个回答，"我只是想参加而已。"

6′ 学年的最后一周，老师想尽办法让孩子们在整个暑假里能留下分数的印象。她告诉他们，在家里也可以像在学校那样思考分数，例如，"半块三明治"，"四分之一个馅饼"、"十分之一美元"。这时，一个男孩儿"恍然大悟"，大声说，"我爸爸昨天晚上拿着五分之一加仑的酒回家。"

7′ 有些学数学的学生就像吸墨纸，尽情地吸收，但又都还了回来。

8′ 一个赌徒的7岁儿子在学校数数，他的回答是，“1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，J，Q，K。”

9′ “托米，‘没有’是什么？”老师问。

“‘没有’就是脱了皮的气球。”托米回答。

10′ 数学老师在课堂上布置了好多问题，他想学生要几个小时才能答完。他安逸地坐在旋转椅上，可15分钟后，他的打算就落空了。

“先生，还有问题吗？”

老师几乎惊呆了，问，“你的意思是已经把我布置的那些问题解决了？”

“不，”学生回答，“我做不了那些，所以我想我也许运气好，能做点儿别的。”

11′ “你的数学老师是不是很严厉？”

“他呀？你记得斯米迪（Smitty）吗？死在课堂上了，老师扶着他，直到把课讲完。”

12′ 如果所有在大学数学课上睡觉的同学首尾相连，他们一定会更舒服。

13′ “在多数数学系，”系主任说，“一半的委员做完了所有的事情，而另一半什么也不做。我很高兴地告诉大家，我们系正好相反。”

14′ 大学新生桑迪（Sandy）遇到一个难题，给妈妈发了一封特别的航空快信：

“亲爱的妈妈：请速寄40元新衣服钱来。我和托米约会六次，带来的衣服都穿坏了。下周六晚上还有约会，一定要新衣服。”

母亲通过“西联”（Western Union）解决了问题：[1]“另外找一个男朋友，重新开始。”

1 “西联”是世界著名的特快汇款公司，在中国也有25000多个合作网点。

15′ 数学教授把儿子送进和他们竞争的一个学院，第一年结束时，孩子回家来，高兴地宣布他在数学班上是第二名。

“第二？”父亲问，“第二？为什么不是第一呢？”

孩子暗下决心，用功苦读数学。第二年带着数学第一的荣誉回家了。父亲默默看了他几分钟，然后耸耸肩，嘟哝着说，“嗯，数学第一，好啊，那个学院就不可能有像样的数学系！”

16′ 说话声最大的代表引起的吵闹乘以出席会议的代表人数，就刻画了一个会议。

17′ 一个会就是一连串的2。It consists of 2 days, which is 2 short, and afterward, you are 2 tired 2 return 2 work and 2 broke not 2.[2]

2 2读音同to或too，这话的意思是，“会期2天，是太短了，然后，你太累了，不能赶回来工作，并且钱也花光了。”

18′ 一个同学承认，他在数学课上学会的惟一本领就是坐着睡觉。

19′ Nobody ever got hurt on the corners of a square deal.[3]

3 公平交易的几方都不会受伤害。

20′ 一个大学生在数学期中考试中被一道特别的问题难住了，他最后在那个问题下批了一句“This rings no bell.”[4]

考卷发下来时，同学发现教授也写了一个批语：“Ding-Dong——见83页。”

4 表面意思是“它没敲响铃声”，所以教授回答“叮咚”；实际意思是“我对问题没印象了”。

21′ 数学史老师要学生说出腓尼基人的主要贡献。同学的回答是，“百叶窗。”

22′ 下面是出现在中学数学考试的一句说明：

“这张纸上表达的观点是我自己的，而不一定是教科书的。”

23′ 临时抱佛脚的同学参加圣诞节前的数学考试，他在试卷上写着，

“只有上帝知道这些问题的答案。圣诞快乐！”

教授判了试卷，也回应了一句话：

“上帝 100 分，你 0 分。新年快乐！”

24′ 我听说这些年来数学老师挣钱不少；我刚听说一个数学老师的事儿，他 20 岁时穷困潦倒，却带着 50 000 美元的财富舒适地退休了。那笔钱是他靠自己的勤奋、节俭、用心和坚毅挣来的，另外还包括死去的叔叔给他留下的 49 990 美元。

25′ 数学的一个悲剧是一系列残忍的事实扼杀一个美丽的定理。

26′ 一个暴富者对儿子的家庭老师说：

“教那孩子数 100 以上的数字是没有意义的。他可以雇一个会计来为他记账。”

“是的，先生，”老师咕哝着，“可他自己还要玩儿高尔夫球的，是吧？”

27′ 不论什么时候，两人相见总有 6 人在场。因为每个人都是三个：一个是自己看自己，一个是别人看自己，一个是真实的自己。

28′“维利,”老师问,“如果燃油卖1美元1加仑,你给加油者200美元,他该为你加多少油啊?”

“大约190加仑,”维利想了一会儿,然后回答。

“为什么?那是不对的。”老师说。

“是的,老师,我知道,”维利说,“可他们都是那么做的。”

29′“你不能来这儿像那样要求加薪,”教育局长说,“你必须逐步提升自己。”[5]

“是啊,”年轻的数学老师回答,“我激动得浑身都在打颤呢。”

30′“我该涨薪水了,先生,”数学老师对教育局长说,“否则我不得不离开专业。有三家公司正等着我呢。”

“哪三家?”局长问。

“电灯、电话和煤气。”老师回答。[6]

31′“你在用功学三角课吗?”

“是的,我一直在边上动脑筋呢。”[7]

32′上甜点时,吉米的肚子已经不能再撑了。他把手伸进皮带,解释说,“猜猜看,我要移动两位小数点了。”

33′有个教授照食谱饮食——他想赢得“nobelly”奖。[8]

34′当今“3 R”似乎是指火箭(rocket)、雷达(radar)和放射性(radioactive)物质。[9]

35′“那好,”父亲接着说,“如果你有1美元,我有1美元,我俩交换,各自还是只有1美元。但如果我有一个思想,你有一个思想,我们交换,每人就会有两个思想。对吧?”

5 “work yourself up”也有让自己兴奋起来的意思。

6 这三家公司也等着所有的人呢。

7 “边上”(on the verge of)是双关语,其实是“差点儿”用功。

8 这个词儿像“诺贝尔”(Nobel)其实是no-belly(“没肚子”)。

9 数学教育常说的3R有:Revolution, Reform, Research; Recruit, Retain, Renew等。另外还有更一般的教育原则:Reading, Writing, Arithmetic。

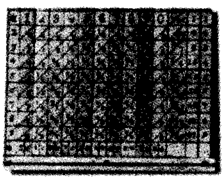
女儿听了，还没弄明白——她想用数学来证明。

36′ 数学教授：你听说过新的自助理念吗？

学生：没有。怎么说？

教授：它叫家庭作业。

37′ 到了学校春游的时间了，孩子问爸爸要钱。父亲问他理由，儿子回答，“哦，我们数学老师要离开学校了，全班想给他一点儿动量。”



纳皮尔的骨头原是刻在骨头上的计算工具。

38′ 墓志铭：

这里安息着纳皮尔的骨头。

39′ 纯数学家吵闹着抱怨邻居家的孩子在他家的新混凝土便道上留下了脚印.

“你喜欢那些孩子吗？”邻居问。

“噢，是的，我非常喜欢他们，”纯数学家说，“不过是抽象的，不是具体的。”[10]

10 “具体的”(concrete)也是“混凝土”的。

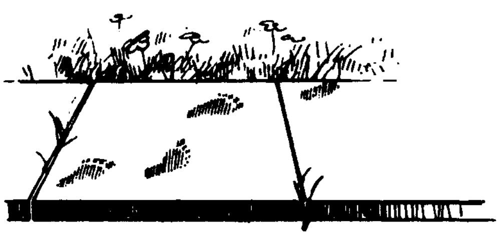


图 40

40′ 如果孩子没能背好乘法口诀，就用尺子敲他的关节，这对现代儿童心理有好处，能使他们更聪明。

41′ 四年级的算术奖发过了，妈妈问孩子有没有得奖。

“没有，”孩子回答，“不过我得到特别提名啦。”[11]

11 一般说“荣誉（honorable）提名”，小孩儿说的是“horrible”（可怕的）。

42′ 两个七年级男孩儿在通电话。

“是的，11 页，第 8 题——你老爸的答案是什么？”

“他也没答上来，正在找 CPA 呢。”[12]

12 CPA：注册会计师考试。

43′ 一个安全标志上写着：“学校——当心别撞了孩子。”

它下面涂写的是，“等数学老师。”

44′ 初中数学老师在报告成绩那天笑着告诉孩子们，如果父母因为成绩不好而不要他们回家，他们可以到老师的家里去住。那天晚上，他回家吃饭时，看见 41 个同学正坐在他家的走廊里呢。

45′ 托米因为数学成绩太差，受到了严厉的处罚。他就问，“那么，爸爸，你说我的问题出在哪儿——是遗传还是环境？”

46′ 年轻的应聘者满怀希望向一家工程公司的人推销自己。

“你大学数学成绩如何？”接待人员问他。

“它们都在水下。”应聘者回答。

“水下？什么意思？”

“都在 C 等以下。”小伙子承认。[13]

13 C 等，读音同 sea level，海平面。

47′ “教授，”好奇的同学问，“你能给我解释极限理论吗？”

“好的，小伙子。让我们假定你招呼一个漂亮姑娘。你们的位置正好在客厅的两头。你朝她走过一半的距离，然后走过剩下距离的一半，然后再走一半，如此继续下去。你明白了吗？从理论上说，你永远不能走到女孩儿那儿。另一方面，实际说来，你

马上就能走近她。”

48′“你知道，”数学老师对一个懒学生说，“你的脑袋对你来说就像房子里的小阁楼——位置最高，却空空如也。”（一个命题的例子。）

49′ 校董会主席对雇来协助算术教学的漂亮小姐有一点儿好奇，就问，“她会做乘除加减吗?”

“不会，”教务长回答，“不过她肯定能做因子分解。”[14]

14 “减”是 subtract，教务长顺着答“distract”，说小姐能令人分心。

50′ 一个数学物理学家乘专车去都会区的礼堂，他当天晚上要在那儿演讲。当豪华大轿车飞驰向前时，他就在车上预演他的讲话。满怀崇拜的司机说，“我真想能像您那样讲话，吸引大家的注意。”

“哦，那不难做到，”科学家说，“干脆你把我的稿子拿去，看一遍，晚上由你来讲——我替你开车；顺便说一句，这儿没人认识我。观众不会发现有什么不对的。”

司机最后答应了。真够奇怪的，他确实讲得很好。当听众要求留一点儿时间来回答问题时，他吓了一跳。有人提了一个专业问题，他回答说，“好，这实在是一个简单的问题；为了说明它有多么简单，我想让我的司机来回答。”

51′ 一个数学家去巴尔的摩演讲，发现只有稀疏的几个人来听。他倒没觉得不安，说，“一共来了 14 个人，不要紧的，我很荣幸能有特权给巴尔的摩最聪明的 14 个人讲话。”

52′ 一连好几个星期，当地的一个数学老师来买了好些扫帚。店老板很好奇，最后他听到了解释。

“是这样的，”那个老师说，“我1美元一把将它们卖给了我的邻居和朋友。”

“伙计，”老板反对说，“你可不能那样做了。你可是每把一块两毛五从我这儿买的呀。”

“是啊，我知道，”老师承认，“但那也比教书强。”

53′ 一天，数学老师的车停在屠夫的店门口，屠夫看见老师的口袋里有只手枪，就报告了警察。老师的汽车熄火时，警察抓住了他。

“举起手出来，老实点儿！”警察命令。

警察从车里搜到了那只枪——一只水枪。

“我家里还有一打呢，”老师解释说，“是我从学生那儿没收来的。”

54′ 近视的数学老师发脾气了。

“最后一排的那个同学——二次方程的求根公式是什么？”

“我不知道。”

“那我问你，一个二次方程有几个根？”

“我不知道。”

“上周五我讲过的。昨晚上你做什么了？”

“和几个朋友一起喝啤酒。”

老师气急败坏，脸都紫了。“你还有脸站在这儿告诉我那个！你打算怎么通过考试呢？”

“噢，我不考试。我是电工，刚才来这儿修电灯的。”

55′ 去年月食发生前，老师向他的六年级同学宣布，第二天晚上9点能看到全食。他描绘说那是大自然最美妙的景观，他还

强调，它对每个人都一样，不需要花一分钱。他说完后，一个厌倦生活的11岁同学一副听天由命的样子，问，"在哪个频道?"

56′ 一个学生把书扔向数学老师。

"我才不会那么做呢，"另一个学生说。

"为什么呢?"犯错误的学生问。

"因为对书发泄是没有用的。"

57′ 两个朋友在船上，看见一个人斜靠在右舷的栏杆上。

"我敢打赌，他是数学教授，"一个人大胆猜测。

"如果是数学教授，我会看出来的，"另一个回答，"我出5美元，赌他不是。"

他们拿出赌注，走近甲板的人。"打扰了，你能回答我们一个问题吗?你是数学教授吗?"

"不是，"那人回答，"我晕船了，看起来才会那个样子。"

58′ 有个学数学的学生很懒惰，在学吹长号，因为只有在那件乐器上，只要让东西滑动，你就能到任何地方。

59′ 祝福那些兜大圈子的人，因为他们应该称作大轮。

60′ 学校的那个数学老师给教学评估巡视员们留下了非常深刻的印象。老师每次向班上的学生提问，所有的手立刻都举起来，不论叫到谁，都能正确回答。

巡视员们不知道，就在他们到来之前，那个老师就交代过，"我提问时，知道答案的举右手，不知道的举左手。"

61′ 我们的朋友很得意有了第一个宝贝儿子。孩子当然应该跟父亲姓 Mathew，我侄儿突然想到，"干吗不叫他 New Math?"[15]

15 这又是一个关于"新数学"的笑话。

(Ruth J. Anderson)

62′ 一个大学新生，中学时数学不太好，决定每天晚上单独拿出三个小时来做高等代数作业。他严格按照这个时间表，进展似乎很顺利。可是有一天晚上，他看到了这样的说明：

“从问题 17 到 21，每个都有无穷多个解，请求出所有的解。”

63′ 数学教授在医院等着做一个很精密的手术。一个年轻的外科医生给他做术前体检，告诉他，“呀，你是史密斯教授吧，在威斯康辛大学教数学，我跟你学过高等代数的。”

接着是很久的沉默，最后，教授问，“你那门课的成绩怎样?”

“哦，你给我 B 加，”医生愉快地回答。

“感谢上帝，”教授在体检台上嘟囔着。

64′ 数学最可爱的一点就是，它能在很大程度上使我们躲避做任何实际的事情。(Mathew Pordage)

65′ 昨天，一个父亲听到一个预言，说世界末日将在下个周末降临。他把预言告诉正在用功准备考试的儿子，儿子的回答是：“太好了!”

66′ 我以前有个数学老师是对眼，管不了自己的学生。

67′ 你知道数学家是些头脑净是符号的人吗?

68′ 造币厂应该停止铸造硬币了——由于通货膨胀，它们已经一文不值了。

69′ 学报对课程的描述与教授讲的无关。(More Kline)

《为什么教授不能教书?》, St. Martin's Press, 1977, p. 10

70′ 大学聘教授就像某些男人选老婆——总是选择那些令别人羡慕的。(More Kline)

《为什么教授不能教书?》, St. Martin's Press, 1977, p. 10

71′ 仅仅就传播知识而言, 那么, 自 15 世纪印刷技术普及以来, 没有那所大学还有存在的资格。(怀特海《教育的目的》)

72′ 假定一些性质的好处, 就像不靠辛勤劳动而能偷来东西。(罗素)

73′ 在任何数学会议上, 最有趣的两篇论文都是同时宣读的。

74′ 爱思考的人都学会了在“几乎所有”或“几乎没有”的时候说“所有”和“没有”。[16]

16 见 W. Ward Fearnside and William B. Holther *Fallacy, the Counterfeit of Argument*, Prentice-Hall, 1950, p. 12。

75′ 如果你的新定理都能非常简洁地表达, 那倒是一个病态的例外。(Adrain Mathesis)

76′ 所有伟大定理都是午夜以后发现的。(Adrain Mathesis)

77′ 数学中最伟大的未解定理是, 为什么有些人的数学比别人好。(Adrain Mathesis)

78′ 乐观的园丁总是相信, 那些曾经衰败的东西都必将重新生长起来。(Floyd R. Miller)

79′“好了，如果你们心里想到了那一点，”教授刚给学生解释了一个数学定理，然后接着说，“那你们就算大概明白它了。”(Thomas Lamance)

80′墓志铭：这里安息着欧多克斯（Exdoxus），他死于衰竭(exhaustion)。

81′“我们必须先学这些基础课程吗?”一个同学问。

“只有一种事情是从顶上做起的，那就是钻洞。”老师回答。

82′一个刚出校门的数学老师递交了他的求职广告：“我的岗位薪水——起价 17 000 美元。”

教务长回了一句话：“带上自己的香烟和咖啡——这样可以消磨时间。”

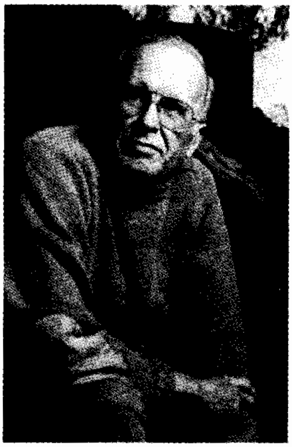
83′教务长：“你想 19 000 美元的还是 17 000 美元的工作?”

数学老师：“有什么区别呢?”

教务长：“哦，我们为 17 000 美元工作的人派了保镖。”

84′一个人心目中的埃尔米特是另一个人心目中的泊松。[17]

17 埃尔米特说我们是数学的仆人（见《相约数学圈》S355），而泊松的幸福生活是发现数学、教数学（见《告别数学圈》A36）。



FORTRAN之父
巴库斯

85′审稿人的报告：

“本文包含了许多新颖的东西和很多正确的东西。遗憾的是，正确的都不新颖而新颖的都不正确。”

——一个数学会上听到的

86′任何程序等到清除了所有

缺陷时，就该作废了。

87′ 计算机很神奇，能在瞬间产生许多人在许多年月才能产生的错误。(M. Meacham)

88′ FORTRAN[18]

TRAN

TRAN

TRAN

TRAN

89′ 学生：Juan 在空集里吗?

教授：空集里没有 Juan。

90′ 连小学生都知道，华盛顿生于 $1000\sqrt{3}$ 年。[19]

18 FORTRAN 是巴库斯（John W. Backus）领导 IBM 团队完成的第一套应用程序语言，打开了现代计算机的大门。遗憾的是，就在此书翻译到这里时，82 岁的巴库斯在美国俄勒冈州去世（2007 年 3 月 17 日）。

19 美国第一任总统华盛顿生于 1732 年 2 月 22 日。

教学点滴

1′ 在黑板上你可能犯连任何略知一二的人都不会犯的错误。(Adrian Mathesis)

2′ 擦黑板和冲抽水马桶一样，都成我们的习惯了。

3′ 擦黑板也是明智的，因为它能销毁犯错误的证据。

4′ 我们至少经历过一次这样的数学课，在听讲的过程中，你口头上说它 A，心里想的却是 B，而学生的感觉是 C，等听完了才发现它是 D。

5′ 要教问题，而不是课文。(E. Kim Nebeuts)

6′ 陈述一个定理然后举一个例子，是不折不扣地本末倒置了。(E. Kim Nebeuts)

7′ 不要讲时机不成熟的课。

8′ 优秀的数学书能驱赶笨拙或恶劣的数学书。[20]

20 见 Brother T. Brendan《数学教师》，1965 年 2 月。

9′ 不要在一堂课上讲两样东西。

10′ 备好课比讲好课更费时间。(E. Kim Nebeuts)

11′ 当心啊！“figure”（数字）与“fictitious”（虚构）来自同一个拉丁词根 fingere。[21]

21 M. J. Moroney *Facts from Figures*, Penguin Books, 1977。

12′“我讲课时，”数学老师说，“总是牢记这样的公理：‘平等对待不平等的事物是最不平等的。’”

13′ 不要做 2×4 老师，那样的人在课堂上只会站在教室的 4 面墙壁中间，在课本的 2 个封面之间翻动。

14′ 有的数学老师在人家睡觉时讲话。

15′ 数学老师应该注意，每个学生都能在某个时候取得显著成功，在某个时候从失败中汲取教训。(William H. Burham 改编)

16′ 教学就像冰山，八分之七在水面以下看不见。(Robert Weaver 改编)

17′ 电视在入侵课堂。在即将实现的理想图景中，不再是老师和学生面对面在一块木头的两头，而是一个教授在同轴电缆的一端，5000 个学生在另一端。

18′ 老师只有自己不断学习，才能真正教好学生。一盏灯只有持续地燃烧自己才能照亮别的灯。一个老师，如果到了学科的尽头，如果没有新的知识交流，而只会向学生重复同样的课程，那他只能给他们增加思想的负担，而不能激发他们成长。（泰戈尔）

19′ 数学老师就像汽车的蓄电池——源源不断地流出能量。所以，他需要经常给自己充电，以免能量枯竭。

20′ 一个人活着并不意味着成长。在一所大学里，某数学老师被提升为助理教授，任命宣布时，另一个老师带着委屈走进系主任办公室。

“为什么我没升职？毕竟我已经在这儿当了 12 年的老师。”

“我不是那么看问题的，”主任回答，“对你的情况，我感觉是，你把一年的经历重复了 12 次。”

21′ 一个伟大的数学老师并不是向学生传播知识，而是唤起他们对数学的兴趣，激发他们追求数学的渴望。他是火花，而不是输油管。（M. J. Berrill 改编）

22′ 数学老师可以把灯点燃，放到你的手上，但你必须拿着它走进黑暗。（William H. Armstrong 改编）

23′ 在数学中，思想的列车没什么价值，除非装载了东西。

24′ 数学食品和其他食品一样，也应该色味俱全。

25′ 用勺子一点点喂养出来的人也只能像一把勺子。

26′ 用抓老鼠的方法思想的人永远不可能抓住狮子。

27′ 思考像弹钢琴，而不像吃饭睡觉。任何时候你能做多少，完全依赖于你已经做了多少。

28′ 学数学是一生的过程，即使一个天才能在大学学完所有已知的数学，他离开学校不久，新涌现的数学又会远远把他甩在后面。

29′ Doug Brumbaugh 教授的名片背后写着：
“若你因为教书而被捕，有足够证据指控你吗?”

30′ 在解题时，即使路线正确，如果你老坐在路上，也会被车轧死的。

31′ 解题成功的秘诀是：坚韧，坚韧，坚韧。

32′ 在解题过程中，没有什么能取代坚韧——仅有才能不够，仅有天赋不够，仅有教育也不够。只有坚韧能最终解决大多数问题。口号“坚持到底”解决了很多数学难题，还将继续解决更多的难题。换句话说，能坚持比能干更重要。

33′ 一个数学家声称，只要有了耐性，你就能解决任何问题。“不过有时需要时间。”他说。

为了证明自己的主张，他又说，“你可以用筛子打水——只要你能等着它结冰。”

34′ 解一道数学难题就像打破一个坚硬的果壳。再硬的果壳都有办法打破，只要有了恰当的工具。

35′ 有了好的数学思想，要牢牢把它套住，还要让它孵化。

36′ 如果你最后认为解决不了那个数学问题，就靠边站着，看别人是怎么解的。

37′ 把数学做抽象，犹如向脆弱的玻璃泼热水，做是能做，但一定要经过预热。

38′ “成功，”数学老师对一个失败的同学说，“只有在字典里才会出现在工作的前面。”

22 意思是，成功等于热情加努力。

39′ Triumph 只不过是加在 try 后面的 umph。[22]

40′ 在数学中，应该把新思想当做鲑鱼苗。把大量小鱼苗投在水里，只有很少的能活下来，而它们就足够了。

41′ 最辉煌的数学思想是瞬间闪现的，而那闪光的瞬间是漫长艰辛劳动的产物。不放松的时候不可能有好的数学思想，一直放松也不可能有好的数学思想。

42′ 如果夸奖与责备的比例至少大于 2 比 1，儿童的算术成绩就可能提高。

43′ 数学教授是他的课程的建筑师，但学生必须自己来堆砌砖块。

44′ 如果从一本书复制东西，那是剽窃；如果从两本书复制

东西，那是研究；如果从六本书复制东西，你就是教授了。

——Fulton J. Sheen 主教的讲话

45′ 有才智的无知是做研究的第一要求。[23]（Charles F. Kettering）

23 “有才智的无知”大概是参照库萨的尼古拉的“有学问的无知”而说的。

46′ 研究就像储蓄，等需要的时候才开始就晚了。

47′ 避免在算术中犯错误的惟一方式就是获取经验，而在算术中获取经验的最佳路径是多犯错误。

48′ 上个星期我看见一个四千年没犯过错误的人，它是不列颠博物馆里的木乃伊。

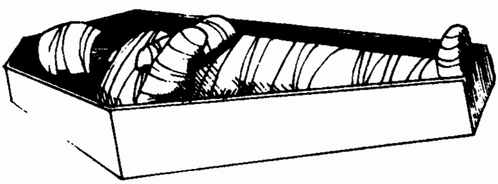


图 41

49′ 寻常的才能加不寻常的坚韧，可以解决大多数数学问题。

50′ 成功解决数学难题的那些人不一定都是非凡的，而是我们这些人用功不够。

51′ 对正在找数学学位论文题目的学生，我们提出以下忠告：

“你不必攀登尚未成功的最高峰。在它周围还有几个小山丘没人去过呢。”

24 数学家比诗人更有想象，多数人认为艺术家最有想象力，那是他们自己缺乏想象力。

52′ 阿基米德头脑的想象力比荷马的多。[24]（伏尔泰）

53′ 教书就是自己学两次。

54′ 老师影响永远，他们也说不清那影响在什么时候终止。

55′ 数学的很大部分是尝试以有相同答案的简单问题取代困难的问题。

56′ 纯数学可以很实用，而应用数学也可以很精美。（Halmos）

57′ 欧几里得教我没有假定就没有证明。因此，在任何论证中，都要检验假定。（贝尔）

58′ 数学的精神在于以最不明显的方式证明最明显的事情。（波利亚）

59′ 做数学的艺术在于去发现那些包含了一般性的所有萌芽的特例。（希尔伯特）

60′ 纯数学在总体上远比应用数学有用，因为有用的东西最重要的在于技术，而数学技术主要是通过纯数学来传达的。（哈代）

逻辑和非逻辑的瞬间

1′ 开学第一天，学生的座位不够。老师问一个小朋友，“你现在（for the present）坐凳子好吗？”小女孩儿放学回家时，才

突然觉悟了，告诉父母说，“我整个上午都坐在凳子上，可没得到礼物（present）。”

2′“托米，大象是在哪儿发现的？”老师问。

“大象那么大，它们几乎不可能走丢。”托米回答。

3′“托米，铁是怎么发现的？”老师问。

“我听爸爸说他们在炼铁。”托米回答。

4′“苏茜，你的小猫叫什么名字？”老师问。

“宾虚（Ben Hur），”苏茜回答。

“真是有趣的猫咪的名字，”老师说，“你怎么想到给猫取那样一个有趣的名字的？”

“哦，我们只叫它宾（Ben），后来生了小猫。”[25]

25 “Ben”是常见的男孩儿名字，后来发现小猫下仔儿了，所以加“Her”（“她”），而“Ben Hur”是美国同名电影（1959年）的主角。

5′“苏茜，为什么大雁到了秋天都往南飞？”老师问。

“因为路太远了，走不动。”苏茜回答。

6′托米向父母宣布，他的阅读课要分两班，“我在尖子班，”他说，“另一班是落后（backward）的同学。但我们不知道谁会分在那班，因为班上没有小朋友会倒着（backward）读书的。”

7′“托米，报告单上的那个低分数是什么？”父亲问。

“也许是教室的温度。”托米回答。

8′苏茜放学回家，带着一月份的成绩单，简直糟透了。妈妈看见后，大声喊道，“这个月到底发生什么事儿啦？”

“没有啊，都挺正常的。”苏茜回答，“你该知道——圣诞节刚过，东西都会跌价的。”

9′ 苏茜想着法儿给不高兴的爸爸解释她可怜的成绩单，说，“别忘了——我们一年都在学新东西呢。”

10′“我不能把成绩单给你带回来，”托米对老师说，“我算术得了一个 A，他们正把它寄给亲戚们呢。”

11′ 一个极富职业精神的年轻老师善于利用一切机会宣讲社会服务的公民意识，她对班上的同学说，我们来到这个世界是为了帮助别人。她的话说得很好，可有个机灵的小伙子大声插话问，“那别人是为什么来的呢？”

12′ 老师：“孩子，你叫什么名字？”

小孩儿：“Jule，先生。”

老师：“你不能说昵称。你的名字应该是 Julius。下一个，你的名字呢？”

另一个小孩儿：“Billious，先生。”[26]

13′ 小女孩儿实在不明白父母做事情的逻辑——他们先说她年纪太小，晚上不能玩儿得太晚；可第二天早晨又告诉她，她年纪够大了，不能老是躺在床上。

14′ 星期天学校老师讲了罗得（Lot）和他妻子的故事，[27]约翰简直控制不住自己的情绪。当老师解释那妇人因为回头看而变成盐柱的时候，小约翰更是难受。他激动地打断老师，真诚地告诫说，“我妈妈回头看过一次，在她开车的时候，后来她就开进栅栏里去了。”

15′ 墓志铭：这里安息着哈代，没有抱歉（apology）。[28]

26 Bill 是 William 的昵称，可小孩儿不懂，跟着老师的逻辑说 Billious。

27 罗得妻子的故事见《圣经·创世纪》(19：17～26)。有人解释，罗得妻子可能是被岩浆覆盖了。

28 哈代写过一本很有名的 *A Mathematician's Apology*（其英文原本已由湖南科学技术出版社出版）。

16′ 恐龙在地球上消失的原因已经找到了：它们的个头太大，没能登上诺亚方舟。

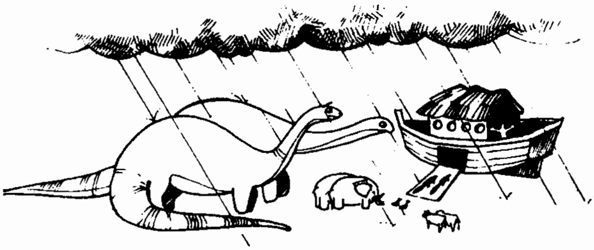


图 42

17′ 一条经济学忠告说：

“不要浪费家里的零碎儿（scrapes）。”

同意。打开窗户，让邻居们也听听。[29]

29 scrap 也是“吵架”。

18′ 有证据证明美国人越来越强壮。20 世纪 30 年代，我还在父亲的小商店当小伙计时，为了把价值两美元的货物搬上顾客的汽车，我跑了两趟。而现在，我那 5 岁的小孩儿就能轻松拿起同样价值的东西。

19′ 幼儿园老师讲了一个爱动物的故事。她说，有人在路边看见一条受伤的小狗，显然是被汽车撞了。他把狗带回家，用外套把它包裹起来，为它养好了伤。老师最后问，“孩子们知道这样的爱心行动吗?”

教室一片安静，接着一个小家伙说，“我没亲眼见过，但我听爸爸说过，他把衬衫放在一匹马上，后来就丢了。”

20′ 一个得克萨斯小朋友从幼儿园跑回家，缠着妈妈给他买枪、枪套和皮带。

“宝贝儿，为什么？为什么要那些东西呀?”妈妈问，“你不

会告诉我要它们是为了上学吧?”

“真的,” 小孩儿回答,“老师说明天教我们拔枪。”[30]

30 老师的意思当然是“画画”(draw)。

21′“那是什么?”

“电子铅笔刀。”

“哦,我真可怜!还从没见过电子铅笔呢。”[31]

31 来自漫画《小兵贝利》(Beetleley)。“电子铅笔”是 Michael Shrayer 在 1976 年开发的一种计算机文字处理软件。

22′小孩儿在练钢琴,满肚子不高兴。这时,一个推销员敲门,问,“小朋友,你妈妈在家吗?”“你想干什么?”小孩儿问。

23′四个孩子的父亲回家看见小家伙们正陷入一片混战,就冲着最好斗的一个问,“小东西,是谁开始的?”

“哦,哈罗德回击我的时候,大家就一块儿开始了。”那小子回答。

24′“只有大象或鲸鱼生出的孩子才有 70 公斤那么重。总统重 75 公斤,所以总统的母亲要么是头大象,要么是只鲸鱼。”(Stefan Themerson)

25′那个系主任当上参议员,就辞去了大学的职位,于是,大学和参议院的智商都同时提高了。